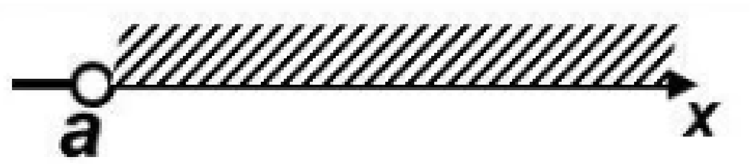
Подготовка к ОГЭ – 2024
Задания №13, 20.
Неравенства, системы неравенств

Давыдова Ольга Викторовна,
учитель математики
МАОУ СОШ №15 города Тюмени

Виды числовых промежутков

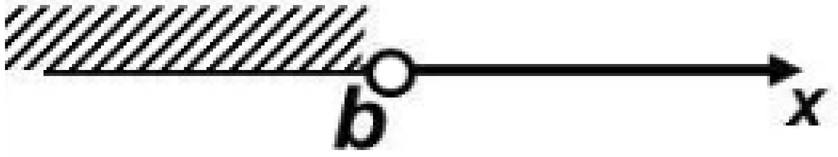
- Открытый луч
- $(a; +\infty)$
- $x > a$
- Точка вырезанная



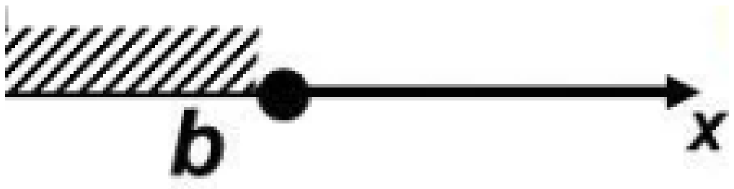
- Луч
- $[a; +\infty)$
- $x \geq a$
- Точка закрашенная

Виды числовых промежутков

- Открытый луч
- $(-\infty; b)$
- $x < b$
- Точка вырезанная



- Луч
- $(-\infty; b]$
- $x \leq b$
- Точка закрашенная



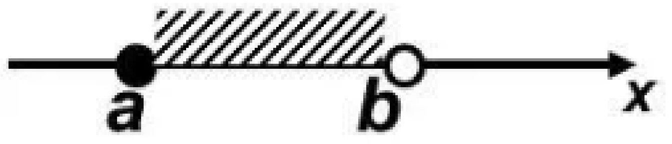
Виды числовых промежутков

- Интервал
- $(a; b)$
- $a < x < b$
- Точки вырезанные

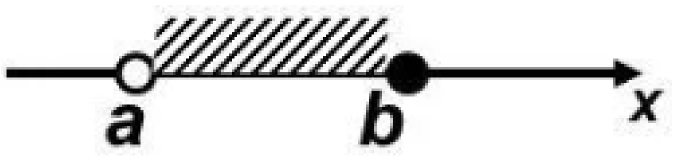
- Отрезок
- $[a; b]$
- $a \leq x \leq b$
- Точки закрашенные

Виды числовых промежутков

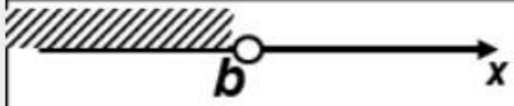
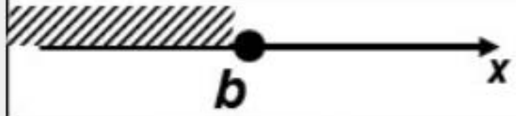
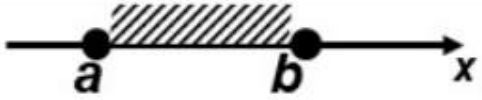
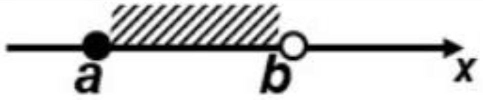
- Полуинтервал
- $[a; b)$
- $a \le x < b$
- Точка a – закрашенная, b – вырезанная



- Полуинтервал
- $(a; b]$
- $a < x \le b$
- Точка a –вырезанная, b – закрашенная



Числовые промежутки

Геометрическая модель	Обозначение	Название числового промежутка	Аналитическая модель(неравенство)
	$(a; +\infty)$	Открытый луч	$x > a$
	$[a; +\infty)$	Луч	$x \geq a$
	$(-\infty; b)$	Открытый луч	$x < b$
	$(-\infty; b]$	Луч	$x \leq b$
	$(a; b)$	Интервал	$a < x < b$
	$[a; b]$	Отрезок	$a \leq x \leq b$
	$[a; b)$	Полуинтервал	$a \leq x < b$
	$(a; b]$	Полуинтервал	$a < x \leq b$

Линейные неравенства

Неравенства вида $ax < b$ или $ax > b$, где a и b – некоторые числа, называют линейными неравенствами с одной переменной.

Решением неравенства с одной переменной называется значение переменной, которое обращает его в верное числовое неравенство.

НАПРИМЕР:

число **5** является решением неравенства $2x < 15$, т.к.

$2 \cdot 5 < 15$ – верное числовое неравенство.

Решить неравенство – значит найти все его решения или доказать, что решений нет.

Неравенства, имеющие одни и те же решения, называются **равносильными**.

При решении неравенств руководствуются следующими правилами:

- Если слагаемое перенести из одной части неравенства в другую с противоположным знаком, то получится равносильное ему неравенство;
- Если обе части неравенства умножить или разделить на одно и то же **положительное** число, то получится равносильное ему неравенство;
- Если обе части неравенства умножить или разделить на одно и то же **отрицательное** число, изменив при этом знак неравенства на противоположный, то получится равносильное ему неравенство

Вспомогательное задание.

Какие из данных утверждений неверны, если $a < c$?

1 1) $a-49<c-49$ 2) $a+23<c+23$ 3) $-\frac{a}{26}<-\frac{c}{26}$ 4) $\frac{a}{5}<\frac{c}{5}$

2 1) $a-24<c-24$ 2) $a+33<c+33$ 3) $-\frac{a}{5}<-\frac{c}{5}$ 4) $\frac{a}{17}<\frac{c}{17}$

o

ПРИМЕР 1.

Решить неравенство: $5x < 24 - 7x$

<u>Решение:</u>

$5x < 24 - 7x$

Перенесем слагаемое $-7x$ с противоположным знаком в левую часть неравенства:

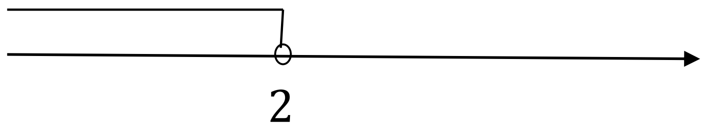
$5x + 7x < 24$

Приведем подобные слагаемые: $12x < 24$

Разделим обе части неравенства на число 12 (знак неравенства не меняем, т.к. делим на положительное число)

$x < 24:12$

$x < 2$



Ответ: $(-\infty; 2)$ или $x < 2$

ПРИМЕР 2

Решить неравенство: $2x - 15 < 7x$

<u>Решение:</u>

$2x - 15 < 7x$

Перенесем с противоположными знаками слагаемое $7x$ в левую часть неравенства, а слагаемое -15 в правую часть:

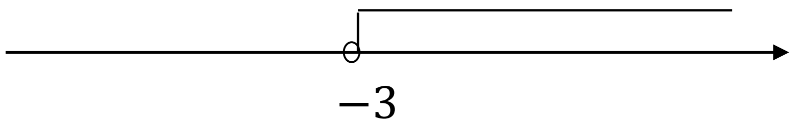
$2x - 7x < 15$

Приведем подобные слагаемые: $-5x < 15$

Разделим обе части неравенства на -5 (знак неравенства меняем, т.к. делим на отрицательное число)

$x > 15 : (-5)$

$x > -3$



Ответ: $(-3; +\infty)$ или $x > -3$

ПРИМЕРЫ ОГЭ (открытый банк заданий ФИПИ).

№1 Укажите решение неравенства

$5x + 4 \leq x + 6.$

1) $(-\infty;\ 0{,}5]$

2) $(-\infty;\ 2{,}5]$

3) $[0{,}5;\ +\infty)$

4) $[2{,}5;\ +\infty)$

Решение:

$$5x + 4 \leq x + 6$$

$$5x - x \leq 6 - 4$$

$$4x \leq 2$$

$$x \leq 2 : 4$$

$$x \leq 0{,}5$$

Правильный ответ: 1

№2 Укажите решение неравенства

$2 + x \leq 5x - 8.$

1) 

2) 

3) 

4) 

Решение:

$$2 + x \leq 5x - 8$$

$$x - 5x \leq -8 - 2$$

$$-4x \leq -10$$

$$x \geq -10 : (-4)$$

$$x \geq 2{,}5$$

Правильный ответ: 4

Задачи для самостоятельного решения

№FC6D5A

Укажите решение неравенства
$-3-x<4x+7$.

1) $(-\infty;\ -0{,}8)$
2) $(-2;\ +\infty)$
3) $(-\infty;\ -2)$
4) $(-0{,}8;\ +\infty)$

№3BB87F

Укажите решение неравенства
$4x-4\geq 9x+6$.

1) $[-0{,}4;\ +\infty)$
2) $(-\infty;\ -2]$
3) $[-2;\ +\infty)$
4) $(-\infty;\ -0{,}4]$

№B4D411

Укажите решение неравенства
$-3-3x>7x-9$.

1) $(0{,}6;\ +\infty)$
2) $(-\infty;\ 1{,}2)$
3) $(1{,}2;\ +\infty)$
4) $(-\infty;\ 0{,}6)$

№03CA70

Укажите решение неравенства
$4x+5\geq 6x-2$.

1) 

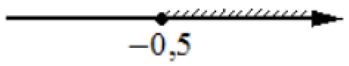
2) 

3) 

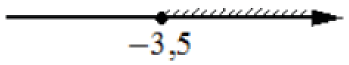
4) 

№E08145

Укажите решение неравенства
$4x-2\geq -2x-5$.

1) 

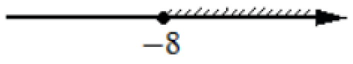
2) 

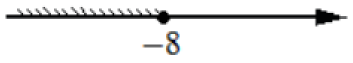
3) 

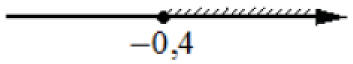
4) 

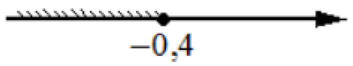
№7BEE5C

Укажите решение неравенства
$-2x+5\leq -3x-3$.

1) 

2) 

3) 

4) 

ПРИМЕР 3.

Решить неравенство: $4(x+8)-7(x-1)<12$

<u>Решение:</u>

$4(x+8)-7(x-1)<12$

Раскроем скобки: $4x+32-7x+1<12$

Перенесем слагаемые 32 и 1 с противоположным знаком в правую часть неравенства:

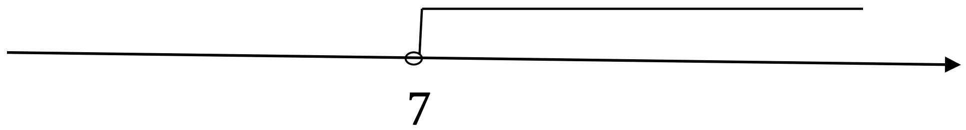
$$4x-7x<12-32-1$$

Приведем подобные слагаемые: $-3x<-21$

Разделим обе части неравенства на число -3 (знак неравенства меняем на противоположный)

$x>-21:(-3)$

$x>7$



Ответ: $(7;+\infty)$ или $x>7$

ПРИМЕР 4.

Решить неравенство: $a + 2 < 5(2a + 8) + 13(4 - a)$

<u>Решение:</u>

$a + 2 < 5(2a + 8) + 13(4 - a)$

Раскроем скобки:

$a + 2 < 10a + 40 + 52 - 13a$

$a - 10a + 13a < 40 + 52 - 2$

$4a < 90$

$a < 90 : 4$

$a < 22{,}5$

Ответ: $(-\infty; 22{,}5)$

ПРИМЕРЫ ОГЭ (открытый банк заданий ФИПИ).

№1

Укажите решение неравенства

$3x-2(x-5)\le -6.$

1) $[4;\ +\infty)$
2) $(-\infty;\ 4]$
3) $(-\infty;\ -16]$
4) $[-16;\ +\infty)$

Решение:

$$3x-2(x-5)\le -6$$
$$3x-2x+10\le -6$$
$$3x-2x\le -6-10$$
$$x\le -16$$

Правильный ответ: 3

№2

Укажите решение неравенства

$5x-3(5x-8)<-7.$

1) $(-\infty;\ 3{,}1)$
2) $(-1{,}7;\ +\infty)$
3) $(-\infty;\ -1{,}7)$
4) $(3{,}1;\ +\infty)$

Решение:

$$5x-3(5x-8)<-7$$
$$5x-15x+24<-7$$
$$5x-15x<-7-24$$
$$-10x<-31$$
$$x>3{,}1$$

Правильный ответ: 4

Задачи для самостоятельного решения

№E1EC21

Укажите решение неравенства

$9x - 4(x - 7) \geq -3.$

1) $[5;\ +\infty)$
2) $(-\infty;\ -6{,}2]$
3) $[-6{,}2;\ +\infty)$
4) $(-\infty;\ 5]$

№8E54AC

Укажите решение неравенства

$2x - 3(x - 7) \leq 3.$

1) $(-\infty;\ -24]$
2) $(-\infty;\ 18]$
3) $[18;\ +\infty)$
4) $[-24;\ +\infty)$

№3AC492

Укажите решение неравенства

$2x - 4(3x + 9) \geq -3.$

1) $(-\infty;\ -3{,}3]$
2) $[-3{,}3;\ +\infty)$
3) $[3{,}9;\ +\infty)$
4) $(-\infty;\ 3{,}9]$

ПРИМЕР 5.

Решить неравенство:

$$\frac{x}{3}-\frac{x}{2}<2$$

<u>Решение:</u>

$$\frac{x}{3}-\frac{x}{2}<2$$

Умножим обе части неравенства на наименьший общий знаменатель дробей, входящих в неравенство (т.е. на 6)

$$\frac{x}{3}\cdot 6-\frac{x}{2}\cdot 6<2\cdot 6$$

$$2x-3x<12$$

$$-x<12$$

$$x>-12$$

Ответ: $(-12;+\infty)$

ПРИМЕР 6.

Решить неравенство:

$$\frac{x}{3}+\frac{2x-1}{5}>2x-\frac{1}{15}$$

<u>Решение:</u>

$$\frac{x}{3}+\frac{2x-1}{5}>2x-\frac{1}{15}$$

Умножим обе части неравенства на наименьший общий знаменатель дробей, входящих в неравенство (т.е. на 15)

$$\frac{x}{3}\cdot 15+\frac{2x-1}{5}\cdot 15>2x\cdot 15-\frac{1}{15}\cdot 15$$

$$5x+3(2x-1)>30x-1$$

$$5x+6x-3>30x-1$$

$$5x+6x-30x>-1+3$$

$$-19x>2$$

$$x<-\frac{2}{19}$$

Ответ: $\left(-\infty;-\frac{2}{19}\right)$

Неравенства второй степени с одной переменной (квадратные неравенства)

Неравенства вида $ax^2 + bx + c < 0$ или $ax^2 + bx + c > 0$, где a, b, c – некоторые числа $(a \neq 0)$, называют квадратными неравенствами.

Алгоритм решения квадратного неравенства:

1) находят дискриминант квадратного трёхчлена $ax^2 + bx + c$ и выясняют, имеет ли трёхчлен корни;
2) если трёхчлен имеет корни, то отмечают их на оси x и через отмеченные точки проводят схематически параболу, ветви которой направлены вверх при $a > 0$ или вниз при $a < 0$; если трёхчлен не имеет корней, то схематически изображают параболу, расположенную в верхней полуплоскости при $a > 0$ или в нижней при $a < 0$;
3) находят на оси x промежутки, для которых точки параболы расположены выше оси x (если решают неравенство $ax^2 + bx + c > 0$) или ниже оси x (если решают неравенство $ax^2 + bx + c < 0$).

Некоторые утверждения, необходимые для решения квадратных неравенств:

1. **Если квадратный трехчлен $ax^2 + bx + c$ не имеет корней (т.е. $D < 0$) и если при этом $a > 0$, то при всех значениях x выполняется неравенство: $ax^2 + bx + c > 0$**

2. **Если квадратный трехчлен $ax^2 + bx + c$ не имеет корней (т.е. $D < 0$) и если при этом $a < 0$, то при всех значениях x выполняется неравенство: $ax^2 + bx + c < 0$**

Таким образом:

$D < 0, a > 0$

$ax^2 + bx + c > 0$ => x – любое

$ax^2 + bx + c \leq 0$ => решений нет

$D < 0, a < 0$

$ax^2 + bx + c < 0$ => x – любое

$ax^2 + bx + c \geq 0$ => решений нет

D	a	Графическая иллюстрация	$ax^2+bx+c>0$	$ax^2+bx+c\geq 0$	$ax^2+bx+c<0$	$ax^2+bx+c\leq 0$
$D<0$	$a>0$		x – любое число	x – любое число	нет решений	нет решений
$D<0$	$a<0$		нет решений	нет решений	x – любое число	x – любое число
$D=0$	$a>0$		x – любое число, кроме $x_1=x_2=-\frac{b}{2a}$	x – любое число	нет решений	$x_1=x_2=-\frac{b}{2a}$
$D=0$	$a<0$		нет решений	$x_1=x_2=-\frac{b}{2a}$	x – любое число, кроме $x_1=x_2=-\frac{b}{2a}$	x – любое число
$D>0$	$a>0$		$(-\infty;x_1)\cup(x_2;+\infty)$	$(-\infty;x_1]\cup[x_2;+\infty)$	$(x_1;x_2)$	$[x_1;x_2]$
$D>0$	$a<0$		$(x_1;x_2)$	$[x_1;x_2]$	$(-\infty;x_1)\cup(x_2;+\infty)$	$(-\infty;x_1]\cup[x_2;+\infty)$

ПРИМЕР 7.

Решить неравенство: $5x^2 + 9x - 2 < 0$

Решение:

Рассмотрим функцию $y = 5x^2 + 9x - 2$. Графиком этой функции является парабола, ветви которой направлены вверх.

Найдем корни квадратного трехчлена $5x^2 + 9x - 2$.

Для этого решим уравнение $5x^2 + 9x - 2 = 0$

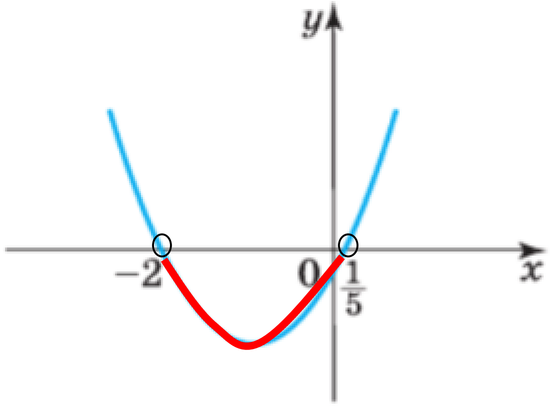
$a = 5, \quad b = 9, \quad c = -2$

$D = b^2 - 4ac = 9^2 - 4 \cdot 5 \cdot (-2) = 81 + 40 = 121 > 0$

Уравнение имеет два корня:

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} = \frac{-9 - \sqrt{121}}{2 \cdot 5} = \frac{-9 - 11}{10} = \frac{-20}{10} = -2$$

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} = \frac{-9 + \sqrt{121}}{2 \cdot 5} = \frac{-9 + 11}{10} = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$$



Это значит, что парабола пересекает ось x в двух точках, абсциссы которых равны -2 и $\frac{1}{5}$

Покажем схематично, как расположена парабола в координатной плоскости

$y < 0$ при $x \in \left(-2; \frac{1}{5}\right)$

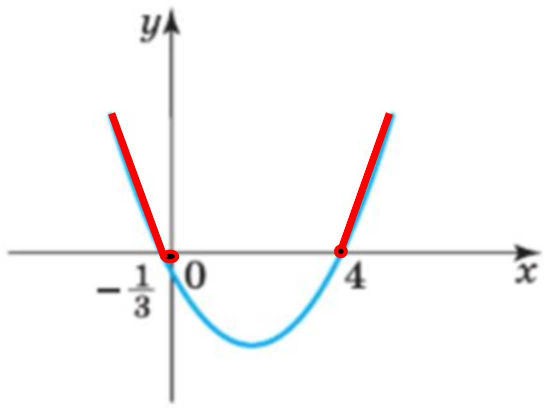
Ответ: $\left(-2; \frac{1}{5}\right)$

ПРИМЕР 8.

Решить неравенство: $3x^2 - 11x - 4 \geq 0$

<u>Решение:</u>

Рассмотрим функцию $y = 3x^2 - 11x - 4$. Графиком этой функции является парабола, ветви которой направлены вверх.



Найдем корни квадратного трехчлена $3x^2 - 11x - 4$.

Для этого решим уравнение $3x^2 - 11x - 4 = 0$

$a = 3, \quad b = -11, \quad c = -4$

$D = b^2 - 4ac = (-11)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-4) = 121 + 48 = 169 > 0$

Уравнение имеет два корня:

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} = \frac{11 - \sqrt{169}}{2 \cdot 3} = \frac{11 - 13}{6} = \frac{-2}{6} = -\frac{1}{3}$$

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} = \frac{11 + \sqrt{169}}{2 \cdot 3} = \frac{11 + 13}{6} = \frac{24}{6} = 4$$

Это значит, что парабола пересекает ось x в двух точках, абсциссы которых равны - $\frac{1}{3}$ и 4

Ответ: $\left(-\infty; -\frac{1}{3}\right]$ или $[4; +\infty)$

ПРИМЕР 9а.

Решить неравенство: $x^2 - 3x + 4 > 0$

<u>Решение:</u>

Рассмотрим функцию $y = x^2 - 3x + 4$. Графиком этой функции является парабола, ветви которой направлены вверх.

Найдем корни квадратного трехчлена $x^2 - 3x + 4$.

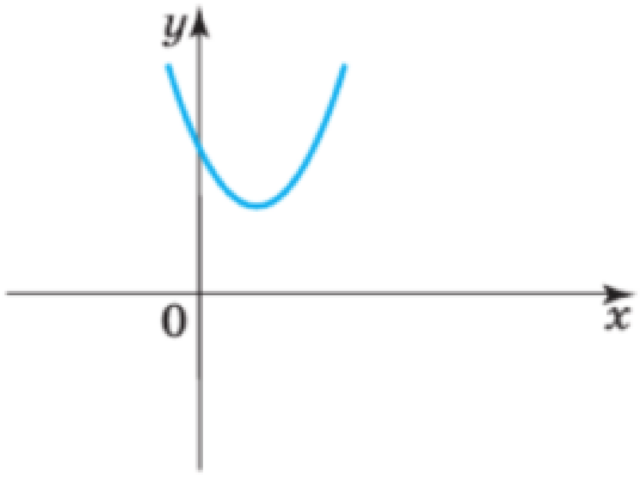
Для этого решим уравнение $x^2 - 3x + 4 = 0$

$a = 1, \qquad b = -3, \qquad c = 4$

$D = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 = 9 - 16 = -7 < 0$

Уравнение не имеет корней.

Это значит, что парабола не имеет с осью х общих точек.



Покажем схематично, как расположена парабола в координатной плоскости

Функция принимает положительные значения при любом x

Ответ: $(-\infty; +\infty)$

ПРИМЕР 9б.

Решить неравенство: $x^2 - 3x + 4 > 0$

<u>Решение:</u>

Найдем корни квадратного трехчлена $x^2 - 3x + 4$.

$x^2 - 3x + 4 = 0$

$D = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 = 9 - 16 = -7 < 0$

D	a	Графическая иллюстрация	$ax^2 + bx + c > 0$
$D < 0$	$a > 0$		x – любое число

т.к. $D < 0, a > 0$ => неравенство

$ax^2 + bx + c > 0$ справедливо при любом x

ПРИМЕРЫ ОГЭ (открытый банк заданий ФИПИ).

№1 Укажите неравенство, которое **не имеет** решений.

1) $x^2 - 8x - 83 > 0$

2) $x^2 - 8x + 83 < 0$

3) $x^2 - 8x - 83 < 0$

4) $x^2 - 8x + 83 > 0$

Решение:

Во всех неравенствах квадратные трехчлены имеют коэффициент $a = 1 > 0$
Таким образом, рассматриваемые функции – параболы, ветви которых направлены вверх.
Для того, чтобы неравенство (все предложенные неравенства строгие) не имело решений, оно должно иметь вид:
$ax^2 + bx + c < 0$ и иметь не более одной точки пересечения с осью х, т.е. $D \leq 0$
Таким образом, неравенства 1 и 4 можно отбросить.

При $a = 1$ получим:

$$D = b^2 - 4ac = b^2 - 4 \cdot 1 \cdot c = b^2 - 4c$$

Следовательно, при $c = -83$ $D = b^2 - 4(-83) > 0$
А значит, квадратный трехчлен $x^2 - 8x - 83$ будет иметь 2 корня, т.е. неравенство
$x^2 - 8x - 83 < 0$ будет иметь решения.
И только неравенство (2) не имеет решений.

Ответ: 2

ПРИМЕРЫ ОГЭ (открытый банк заданий ФИПИ).

№2а Укажите неравенство, решением которого является любое число.

1) $x^2 + 70 > 0$

2) $x^2 - 70 > 0$

3) $x^2 + 70 < 0$

4) $x^2 - 70 < 0$

Решение:

Во всех неравенствах квадратные трехчлены имеют коэффициент $a = 1 > 0$

Таким образом, рассматриваемые функции – параболы, ветви которых направлены вверх.

Для того, чтобы неравенство (все предложенные неравенства строгие) выполнялось при любом x, оно должно иметь вид:

$ax^2 + bx + c > 0$ и не иметь точек пересечения с осью х, т.е. $D < 0$

Таким образом, неравенства 3 и 4 можно отбросить.

При $a = 1, b = 0$ получим:

$D = b^2 - 4ac = 0^2 - 4 \cdot 1 \cdot c = -4c$

$D < 0$

$-4c < 0$

$c > 0$

Следовательно, при $c = 70$ $D < 0$

А значит, только неравенство $x^2 + 70 > 0$ будет иметь решения при любом x.

Ответ: 1

ПРИМЕРЫ ОГЭ (открытый банк заданий ФИПИ).

№26 Укажите неравенство, решением которого является любое число.

1) $x^2 + 70 > 0$
2) $x^2 - 70 > 0$
3) $x^2 + 70 < 0$
4) $x^2 - 70 < 0$

Решение:

Воспользуемся свойствами неравенств:

$x^2 \geq 0$ при любом x

$x^2 + 70 \geq 70 > 0$ при любом x, т.е. $x^2 + 70 > 0$

Ответ: 1

Задачи для самостоятельного решения

№5D6DA0

Укажите неравенство, которое **не имеет** решений.

1) $x^2 + x + 36 < 0$
2) $x^2 + x - 36 > 0$
3) $x^2 + x + 36 > 0$
4) $x^2 + x - 36 < 0$

№BC9ED1

Укажите неравенство, решением которого является любое число.

1) $x^2 - 64 \geq 0$
2) $x^2 + 64 \leq 0$
3) $x^2 + 64 \geq 0$
4) $x^2 - 64 \leq 0$

№1F430A

Укажите неравенство, которое **не имеет** решений.

1) $x^2 - x + 56 < 0$
2) $x^2 - x - 56 > 0$
3) $x^2 - x - 56 < 0$
4) $x^2 - x + 56 > 0$

№626291

Укажите неравенство, решением которого является любое число.

1) $x^2 + 78 > 0$
2) $x^2 - 78 < 0$
3) $x^2 + 78 < 0$
4) $x^2 - 78 > 0$

Рациональные неравенства

Неравенства вида $h(x) > q(x)$ или $h(x) < q(x)$, где $h(x)$ и $q(x)$ – рациональные выражения, называют рациональными неравенствами с одной переменной.

ПРИМЕРЫ рациональных неравенств:

$(x-1)(x+2)(x-5) < 0,$

$(2x+3)(x-2)x < x^2$

$x^3 + 5x < x^2 + 2$

Метод интервалов

Алгоритм решения неравенства методом интервалов

1. Привести неравенство к виду $f(x) > 0$ ($f(x) < 0$)
2. Найти область определения функции $f(x)$
3. Найти нули функции $f(x)$
4. На числовую прямую нанести полученные точки в порядке возрастания. Данные точки разбивают область определения функции на промежутки, в каждом из которых функция непрерывна и сохраняет знак
5. Найти знаки функции в полученных промежутках (вычислив значение в какой-либо одной точке из каждого промежутка)
6. Записать ответ

ПРИМЕР 10.

Решить неравенство: $(x-5)(x+4)>0$

<u>Решение:</u>

Рассмотрим функцию $f(x)=(x-5)(x+4)$

Областью определения функции - $(-\infty;+\infty)$

Найдем нули функции

$(x-5)(x+4)=0$

$x-5=0$ или $x+4=0$

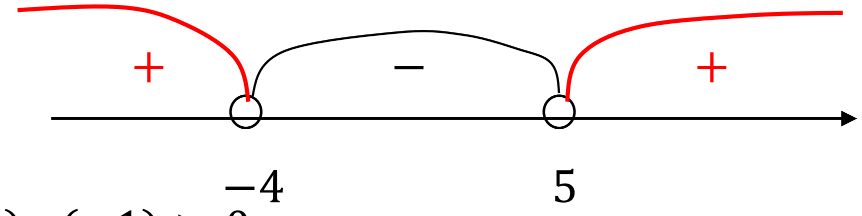
$x=5$ $\qquad$ $x=-4$

Нули функции разбивают ее область определения на промежутки:

$(-\infty;-4), (-4;5), (5;+\infty)$

Выясним знаки этой функции на каждом из указанных промежутков.

	$(-\infty;-4)$	$(-4;5)$	$(5;+\infty)$
$x-5$	$-$	$-$	$+$
$x+4$	$-$	$+$	$+$
$(x-5)(x+4)$	$+$	$-$	$+$



Или:

$x=-5\in(-\infty;-4)$ $\qquad$ $f(-5)=(-5-5)(-5+4)=(-10)\cdot(-1)>0$

$x=0\in(-4;5)$ $\qquad$ $f(0)=(0-5)(0+4)=(-5)\cdot 4<0$

$x=6\in(5;+\infty)$ $\qquad$ $f(6)=(6-5)(6+4)=1\cdot 10>0$

Ответ: $(-\infty;-4), (5;+\infty)$

ПРИМЕР 11.

Решить неравенство: $x^2 - 100 \leq 0$

<u>Решение:</u>

Рассмотрим функцию $f(x) = x^2 - 100$

Областью определения функции - $(-\infty; +\infty)$

Найдем нули функции

$x^2 - 100 = 0$

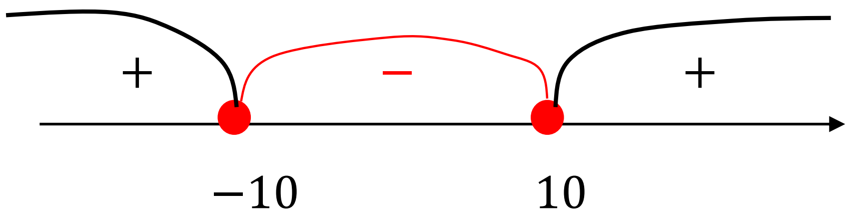
$(x - 10)(x + 10) = 0$

$x - 10 = 0$ или $x + 10 = 0$

$x = 10$ $\qquad$ $x = -10$

Нули функции разбивают ее область определения на промежутки: $(-\infty; -10), (-10; 10), (10; +\infty)$

Выясним знаки этой функции на каждом из указанных промежутков.



$x = -11 \in (-\infty; -10)$ $\qquad$ $f(-11) = (-11 - 10)(-11 + 10) = (-21) \cdot (-1) > 0$

$x = 0 \in (-10; 10)$ $\qquad$ $f(0) = (0 - 10)(0 + 10) = (-10) \cdot 10 < 0$

$x = 11 \in (10; +\infty)$ $\qquad$ $f(11) = (11 - 10)(11 + 10) = 1 \cdot 21 > 0$

Ответ: $[-10; 10]$

ПРИМЕР 12.

Решить неравенство: $(2x-5)(x-3)(x+1)>0$

Решение:

Рассмотрим функцию $f(x)=(2x-5)(x-3)(x+1)$

Областью определения функции - $(-\infty;+\infty)$

Найдем нули функции

$(2x-5)(x-6)(x+1)=0$

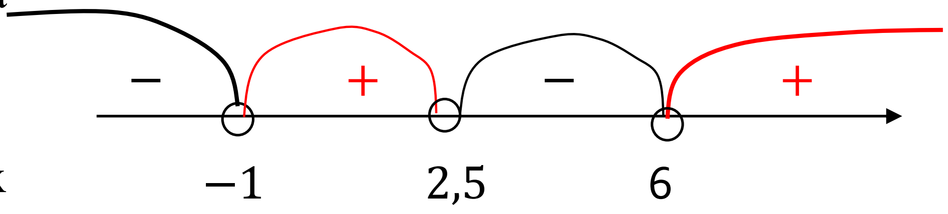
$2x-5=0$ или $x-6=0$ или $x+1=0$

$x=2{,}5$ $\quad x=6$ $\quad x=-1$

Нули функции разбивают ее область определения на промежутки:

$(-\infty;-1),(-1;2{,}5),(2{,}5;6),(6;+\infty)$

Выясним знаки этой функции на каждом из указанных промежутков.



$x=-2\in(-\infty;-1)$ $\quad f(-2)=(2\cdot(-2)-5)(-2-6)(-2+1)=(-9)\cdot(-8)\cdot(-1)<0$

$x=0\in(-1;2{,}5)$ $\quad f(0)=(2\cdot 0-5)(0-6)(0+1)=(-5)\cdot(-6)\cdot 1>0$

$x=3\in(2{,}5;6)$ $\quad f(3)=(2\cdot 3-5)(3-6)(3+1)=1\cdot(-3)\cdot 4<0$

$x=7\in(6;+\infty)$ $\quad f(7)=(2\cdot 7-5)(7-6)(7+1)=9\cdot 1\cdot 8>0$

Ответ: $(-1;2{,}5),(6;+\infty)$

ПРИМЕРЫ ОГЭ (открытый банк заданий ФИПИ).

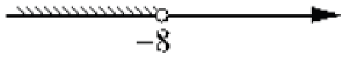
№1.

Укажите решение неравенства

$(x+8)(x-3)<0$.

1) 

2) 

3) 

4) 

<u>Решение:</u>

Рассмотрим функцию $f(x) = (x + 8)(x - 3)$

Областью определения функции - $(-\infty; +\infty)$

Найдем нули функции

$(x + 8)(x - 3) = 0$

$x + 8 = 0$ или $x - 3 = 0$

$x = -8$ $\quad$ $x = 3$

Нули функции разбивают ее область определения на промежутки:

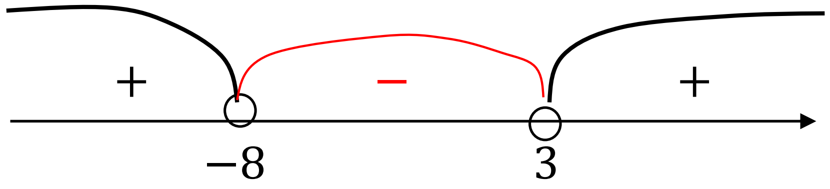
$(-\infty; -8), (-8; 3), (3; +\infty)$

Выясним знаки этой функции на каждом из указанных промежутков.

$x = -10 \in (-\infty; -8)$ $\quad$ $f(-10) = (-10 + 8)(-10 - 3) = (-2) \cdot (-13) > 0$

$x = 0 \in (-8; 3)$ $\quad$ $f(0) = (0 + 8)(0 - 3) = 8 \cdot (-3) < 0$

$x = 5 \in (3; +\infty)$ $\quad$ $f(5) = (5 + 8)(5 - 3) = 13 \cdot 2 > 0$



Ответ: 1

ПРИМЕРЫ ОГЭ (открытый банк заданий ФИПИ).

№2.

Укажите решение неравенства

$6x - x^2 < 0.$

1) 

2) 

3) 

4) 

<u>Решение:</u>

Рассмотрим функцию $f(x) = 6x - x^2$

Областью определения функции - $(-\infty; +\infty)$

Найдем нули функции

$6x - x^2 = 0$

$x(6 - x) = 0$

$x = 0$ или $6 - x = 0$

$x = 6$

Нули функции разбивают ее область определения на промежутки:

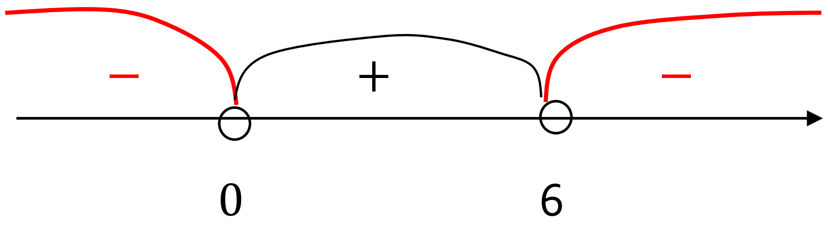
$(-\infty; 0), (0; 6), (6; +\infty)$

Выясним знаки этой функции на каждом из указанных промежутков.

$x = -1 \in (-\infty; 0)$ $\quad f(-1) = (-1) \cdot (6 - (-1)) = (-1) \cdot 7 < 0$

$x = 1 \in (0; 6)$ $\quad f(1) = 1 \cdot (6 - 1) = 1 \cdot 5 > 0$

$x = 7 \in (6; +\infty)$ $\quad f(7) = 7 \cdot (6 - 7) = 7 \cdot (-1) < 0$

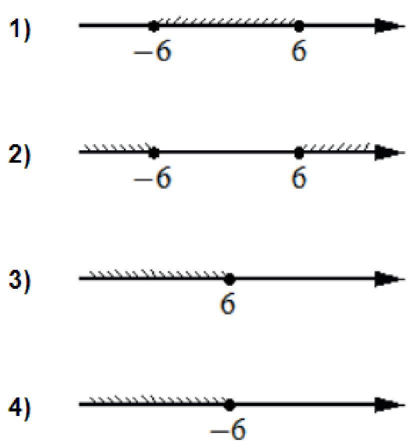


Ответ: 2

ПРИМЕРЫ ОГЭ (открытый банк заданий ФИПИ).

№3.

Укажите решение неравенства
$x^2 \le 36.$



Решение:

Приведем неравенство к виду $f(x) \le 0$

$x^2 - 36 \le 0$

Рассмотрим функцию $f(x) = x^2 - 36$

Областью определения функции - $(-\infty; +\infty)$

Найдем нули функции $x^2 - 36 = 0$

$(x+6)(x-6) = 0$

$x + 6 = 0$ или $x - 6 = 0$

$x = -6$ $\qquad$ $x = 6$

Нули функции разбивают ее область определения на промежутки:

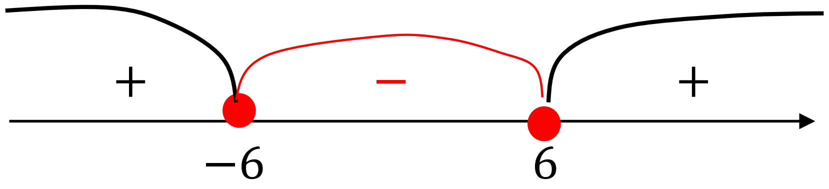
$(-\infty; -6), (-6; 6), (6; +\infty)$

Выясним знаки этой функции на каждом из указанных промежутков.

$x = -7 \in (-\infty; -6)$ $\qquad$ $f(-7) = (-7+6)(-7-6) = (-1) \cdot (-13) > 0$

$x = 0 \in (-6; 6)$ $\qquad$ $f(0) = (0+6)(0-6) = 6 \cdot (-6) < 0$

$x = 7 \in (6; +\infty)$ $\qquad$ $f(7) = (7+6)(7-6) = 13 \cdot 1 > 0$

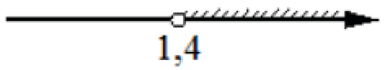


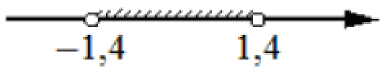
Ответ: 1

№4. ПРИМЕРЫ ОГЭ (открытый банк заданий ФИПИ).

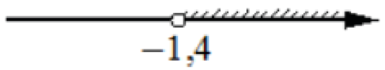
Укажите решение неравенства

$25x^2 > 49.$

1) 

2) 

3) 

4) 

<u>Решение:</u>

Приведем неравенство к виду $f(x) > 0$

$$25x^2 - 49 > 0$$

Рассмотрим функцию $f(x) = 25x^2 - 49$

Областью определения функции - $(-\infty; +\infty)$

Найдем нули функции $25x^2 - 49 = 0$

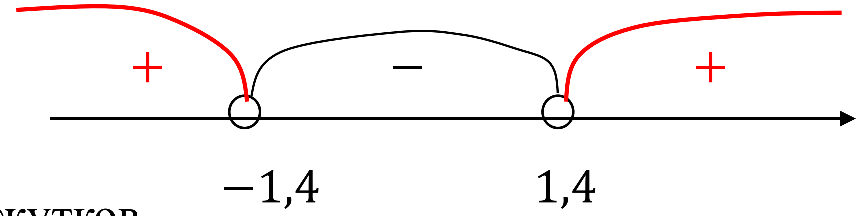
$$(5x+7)(5x-7) = 0$$

$$5x + 7 = 0 \quad \text{или} \quad 5x - 7 = 0$$

$$x = -1{,}4 \qquad\qquad x = 1{,}4$$

Нули функции разбивают ее область определения на промежутки:

$$(-\infty; -1{,}4), (-1{,}4; 1{,}4), (1{,}4; +\infty)$$



Выясним знаки этой функции на каждом из указанных промежутков.

$x = -2 \in (-\infty; -1{,}4)$ $\quad f(-2) = (5\cdot(-2)+7)(5\cdot(-2)-7) = (-3)\cdot(-17) > 0$

$x = 0 \in (-1{,}4; 1{,}4)$ $\quad f(0) = (5\cdot 0+7)(5\cdot 0-7) = 7\cdot(-7) < 0$

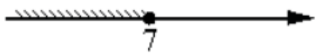
$x = 2 \in (1{,}4; +\infty)$ $\quad f(2) = (5\cdot 2+7)(5\cdot 2-7) = 17\cdot 3 > 0$

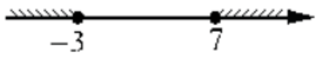
Ответ: 3

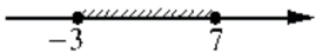
Задачи для самостоятельного решения

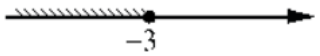
№7DE6BF

Укажите решение неравенства
$(x+3)(x-7)\le 0$.

1) 

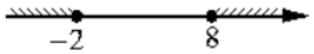
2) 

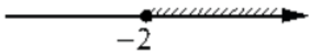
3) 

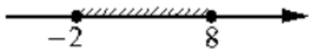
4) 

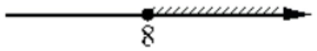
№5B9FF3

Укажите решение неравенства
$(x+2)(x-8)\ge 0$.

1) 

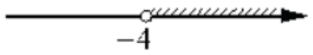
2) 

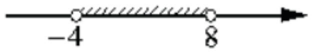
3) 

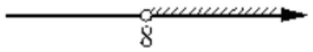
4) 

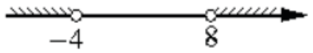
№44B682

Укажите решение неравенства
$(x+4)(x-8)>0$.

1) 

2) 

3) 

4) 

№F9A32A

Укажите решение неравенства
$x^2-49<0.$

1) нет решений
2) $(-\infty;\ +\infty)$
3) $(-7;\ 7)$
4) $(-\infty;\ -7)\cup(7;\ +\infty)$

№2FAC43

Укажите решение неравенства
$x^2-36>0.$

1) $(-\infty;\ +\infty)$
2) $(-\infty;\ -6)\cup(6;\ +\infty)$
3) $(-6;\ 6)$
4) нет решений

№1A3492

Укажите решение неравенства
$x^2-64\ge 0.$

1) $[-8;\ 8]$
2) $(-\infty;\ -8]\cup[8;\ +\infty)$
3) нет решений
4) $(-\infty;\ +\infty)$

Системы неравенств

Решением системы неравенств с одной переменной называется значение переменной, при котором верно каждое из неравенств системы.

Решить систему – значит найти все ее решения или доказать, что решений нет.

ПРИМЕР 13.

Решить систему неравенств: $\begin{cases} 2x - 1 > 6, \\ 5 - 3x > -13 \end{cases}$

<u>Решение:</u>

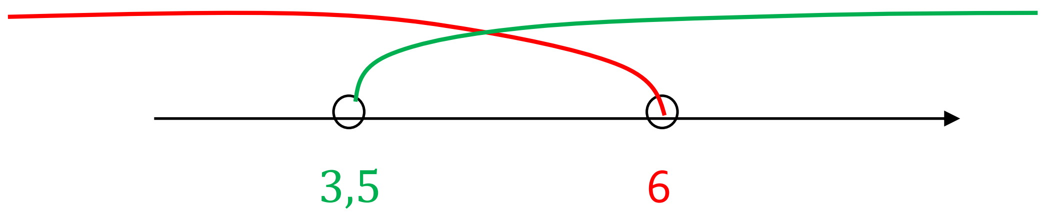
$$\begin{cases} 2x - 1 > 6, \\ 5 - 3x > -13 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x > 6 + 1, \\ -3x > -13 - 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x > 7, \\ -3x > -18 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x > 7:2, \\ x < -18:(-3) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x > 3{,}5, \\ x < 6 \end{cases}$$



Изобразим на координатной прямой множество чисел, удовлетворяющее неравенству $x > 3{,}5$, и множество чисел, удовлетворяющих неравенству $x < 6$ выясним, что оба неравенства верны при $3{,}5 < x < 6$

Ответ: $(3{,}5; 6)$

ПРИМЕР 14.

Решить систему неравенств: $\begin{cases} 3x - 2 > 25, \\ 2 - x < 0 \end{cases}$

Решение:

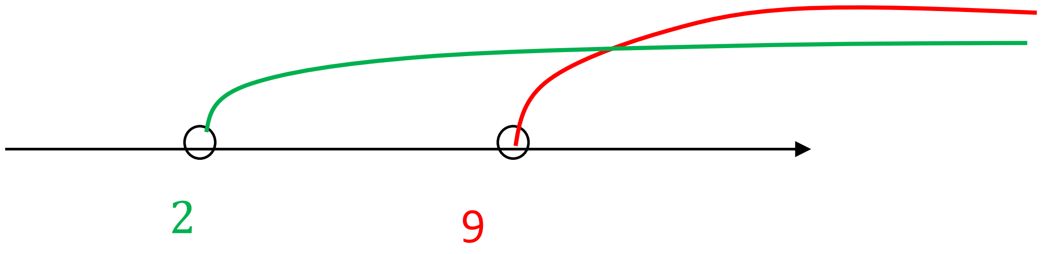
$$\begin{cases} 3x - 2 > 25, \\ 2 - x < 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x > 25 + 2, \\ -x < -2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x > 27, \\ -x < -2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x > 27 : 3, \\ x > -2 : (-1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x > 9, \\ x > 2 \end{cases}$$



Изобразим на координатной прямой множество чисел, удовлетворяющее неравенству $x > 9$, и множество чисел, удовлетворяющих неравенству $x > 2$ выясним, что оба неравенства верны при $x > 9$

Ответ: $(9; +\infty)$

ПРИМЕР 15.

Решить систему неравенств: $\begin{cases} 8x - 3 > 21, \\ x + 5 < 4 \end{cases}$

Решение:

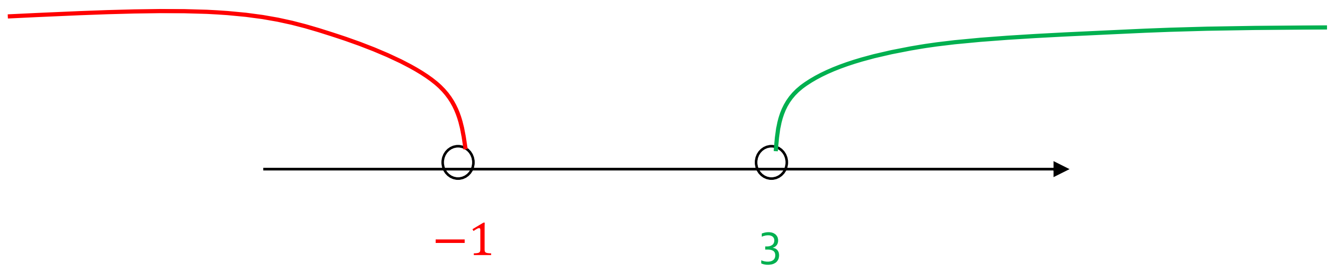
$$\begin{cases} 8x - 3 > 21, \\ x + 5 < 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 8x > 21 + 3, \\ x < 4 - 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 8x > 24, \\ x < -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x > 24:8, \\ x < -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x > 3, \\ x < -1 \end{cases}$$



Изобразим на координатной прямой множество чисел, удовлетворяющее неравенству $x > 3$, и множество чисел, удовлетворяющих неравенству $x < -1$

Ответ: нет решений

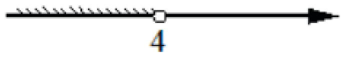
ПРИМЕРЫ ОГЭ (открытый банк заданий ФИПИ).

№1.

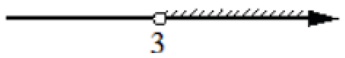
Укажите решение системы неравенств

$$\begin{cases} x > 3, \\ 4 - x < 0. \end{cases}$$

1) 

2) 

3) 

4) 

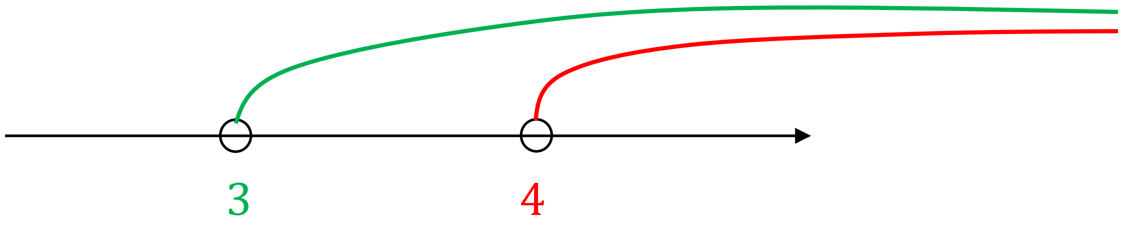
Решение:

$$\begin{cases} x > 3, \\ 4 - x < 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x > 3, \\ -x < -4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x > 3, \\ x > -4 : (-1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x > 3, \\ x > 4 \end{cases}$$



Изобразим на координатной прямой множество чисел, удовлетворяющее неравенству $x > 3$, и множество чисел, удовлетворяющих неравенству $x > 4$ выясним, что оба неравенства верны при $x > 4$

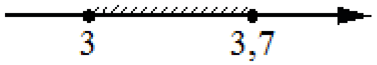
Ответ: 3

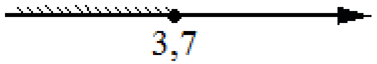
ПРИМЕРЫ ОГЭ (открытый банк заданий ФИПИ).

№2.

Укажите решение системы неравенств

$$\begin{cases} x - 3{,}7 \le 0, \\ x - 2 \ge 1. \end{cases}$$

1) 

2) 

3) 

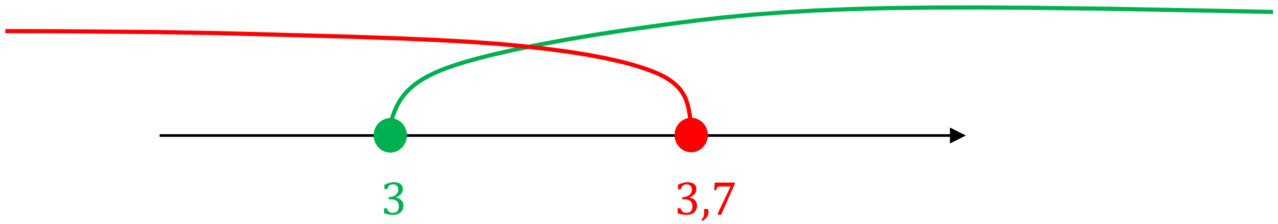
4) 

Решение:

$$\begin{cases} x - 3{,}7 \le 0, \\ x - 2 \ge 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \le 3{,}7, \\ x \ge 1 + 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \le 3{,}7, \\ x \ge 3 \end{cases}$$



Изобразим на координатной прямой множество чисел, удовлетворяющее неравенству $x \ge 3$, и множество чисел, удовлетворяющих неравенству $x \le 3{,}7$ выясним, что оба неравенства верны при $3 \le x \le 3{,}7$

Ответ: 1

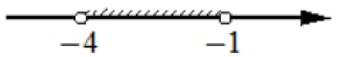
Задачи для самостоятельного решения

№0E49FA

Укажите решение системы неравенств

$$\begin{cases} x > -1, \\ -4 - x > 0. \end{cases}$$

1) 

2) 

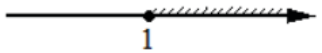
3) 

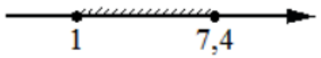
4) нет решений

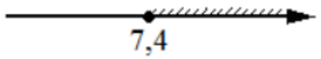
№95AE70

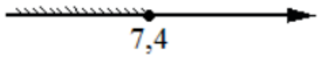
Укажите решение системы неравенств

$$\begin{cases} x - 7{,}4 \geq 0, \\ x + 2 \geq 3. \end{cases}$$

1) 

2) 

3) 

4) 

№8B2598

Укажите решение системы неравенств

$$\begin{cases} -35 + 5x > 0, \\ 6 - 3x > -3. \end{cases}$$

1) 

2) 

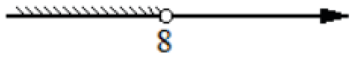
3) нет решений

4) 

№649985

Укажите решение системы неравенств

$$\begin{cases} -12 + 3x < 0, \\ 9 - 4x > -23. \end{cases}$$

1) 

2) 

3) 

4) 

Задание №20 (2 часть)

ПРИМЕР 16

Решить неравенство:

$$\frac{x^2}{3} - \frac{3x+3}{4} < 0$$

Важно! ***Необходимо описать функцию, указать, что графиком является парабола.***

Указать направление ветвей,

найти нули функции.

Схематично изобразить параболу,

расставить знаки

(выделить требуемый промежуток),

записать ответ

Решение:

$\frac{x^2}{3} - \frac{3x+3}{4} < 0 \quad |\cdot 12$

$\frac{x^2}{3}\cdot 12 - \frac{3x+3}{4}\cdot 12 < 0\cdot 12$

$4x^2 - 3(3x+3) < 0$

$4x^2 - 9x - 9 < 0$

Рассмотрим функцию $y = 4x^2 - 9x - 9$

Это квадратичная функция, графиком является парабола, ветви которой направлены вверх.

Найдем нули функции:

$4x^2 - 9x - 9 = 0$

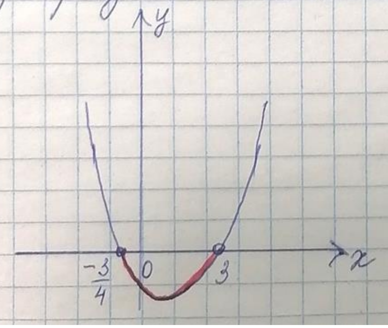
$D = (-9)^2 - 4\cdot 4\cdot(-9) = 81 + 144 = 225$,

$D > 0$, уравнение имеет 2 корня.

$x_1 = \frac{9-\sqrt{225}}{2\cdot 4} = \frac{9-15}{8} = \frac{-6}{8} = -\frac{3}{4}$

$x_2 = \frac{9+\sqrt{225}}{2\cdot 4} = \frac{9+15}{8} = \frac{24}{8} = 3$

Изобразим схематично параболу:



$y < 0$ при $x \in \left(-\frac{3}{4}; 3\right)$

Ответ: $\left(-\frac{3}{4}; 3\right)$

Важно! **Эксперт вправе снизить баллы, если**

– после записи неравенства сразу изображена парабола (нет описания о том, что неравенство решается графическим методом, с помощью параболы);

– отсутствие записи о рассматриваемой функции;

– квадратное уравнение решено не по правилам (при нахождении нулей функции необходимо найти дискриминант и корни развернуто);

– отсутствие схематичного графика;

– отсутствие слова «Ответ».

ПРИМЕР 17а

Решить неравенство: $(x-6)^2 \geq (6x-1)^2$

Решение:

$(x-6)^2 \geq (6x-1)^2$

$x^2 - 12x + 36 \geq 36x^2 - 12x + 1$

$x^2 - 12x + 36 - 36x^2 + 12x - 1 \geq 0$

$-35x^2 + 35 \geq 0 \quad | :(-1)$

$35x^2 - 35 \leq 0 \quad | : 35$

$x^2 - 1 \leq 0$

Рассмотрим функцию $f(x) = x^2 - 1$. Графиком функции является парабола, ветви которой направлены вверх.

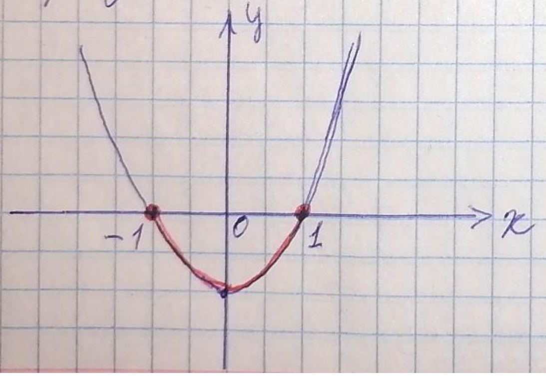
Нули функции: $x^2 - 1 = 0$

$x^2 = 1$

$x = \pm\sqrt{1}$

$x = \pm 1 \Rightarrow x_1 = 1, \quad x_2 = -1$

Изобразим схематично график функции:



$f(x) \leq 0$ при $x \in [-1; 1]$

Ответ: $[-1; 1]$

ПРИМЕР 17б

Решить неравенство: $(x-6)^2 \geq (6x-1)^2$

Решение:

$(x-6)^2 \geq (6x-1)^2$

$x^2 - 12x + 36 \geq 36x^2 - 12x + 1$

$x^2 - 12x + 36 - 36x^2 + 12x - 1 \geq 0$

$-35x^2 + 35 \geq 0 \quad | : (-35)$

$x^2 - 1 \leq 0$

Решим неравенство методом интервалов.

Рассмотрим функцию $f(x) = x^2 - 1$.

Найдем нули функции: $x^2 - 1 = 0$

$(x-1)(x+1) = 0$

$x - 1 = 0$ или $x + 1 = 0$

$x = 1 \qquad x = -1$

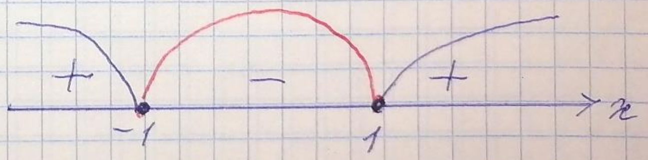
Нули функции разбивают ее область определения на промежутки: $(-\infty; -1)$; $(-1; 1)$; $(1; +\infty)$

Вычислим знак этой функции на каждом из указанных промежутков

$x = -2 \qquad f(-2) = (-2)^2 - 1 = 3 > 0$

$x = 0 \qquad f(0) = 0^2 - 1 = -1 < 0$

$x = 2 \qquad f(2) = 2^2 - 1 = 3 > 0$



$f(x) \leq 0$ при $x \in [-1; 1]$

Ответ: $[-1; 1]$

ПРИМЕР 18.

Решить неравенство: $(x-3)(2x+3)<-7$

Решение:

$(x-3)(2x+3)<-7$

$2x^2+3x-6x-9<-7$

$2x^2-3x-2<0$

Решим неравенство методом интервалов/

Для этого решим уравнение $2x^2-3x-2=0$

$D=b^2-4ac=(-3)^2-4\cdot2\cdot(-2)=9+16=25>0$

Уравнение имеет два корня:

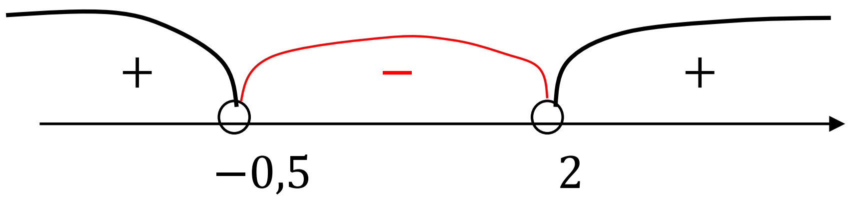
$$x_1=\frac{-b-\sqrt{D}}{2a}=\frac{3-\sqrt{25}}{2\cdot2}=\frac{3-5}{4}=\frac{-2}{4}=-0{,}5$$

$$x_2=\frac{-b+\sqrt{D}}{2a}=\frac{3+\sqrt{25}}{2\cdot2}=\frac{3+5}{4}=\frac{8}{4}=2$$

Важно!

Необходимо указать, что неравенство решается методом интервалов. Корни находить по всем правилам нахождения корней уравнения, определить знаки на каждом промежутке, нарисовать ось, расставить знаки.

При решении неравенств методом интервалов обязательно показывать графическое решение.



Определим знаки выражения $2x^2-3x-2$ на каждом из промежутков

$(-\infty;-0{,}5),(-0{,}5;2),(2;+\infty)$

$x=-1\in(-\infty;-0{,}5)$ $\quad 2\cdot(-1)^2-3\cdot(-1)-2=2+3-2=3>0$

$x=0\in(-0{,}5;2)$ $\quad 2\cdot0^2-3\cdot0-2=-2<0$

$x=3\in(2;+\infty)$ $\quad 2\cdot3^2-3\cdot3-2=18-9-2=7>0$

Ответ: $(-0{,}5;2)$

ПРИМЕР 19.

Решить неравенство: $\left(\sqrt{19}-4{,}5\right)(5-3x)>0$

<u>Решение:</u>

Определим знак выражения $\sqrt{19}-4{,}5$

$\sqrt{19}-4{,}5=\sqrt{19}-\sqrt{20{,}25}<0$

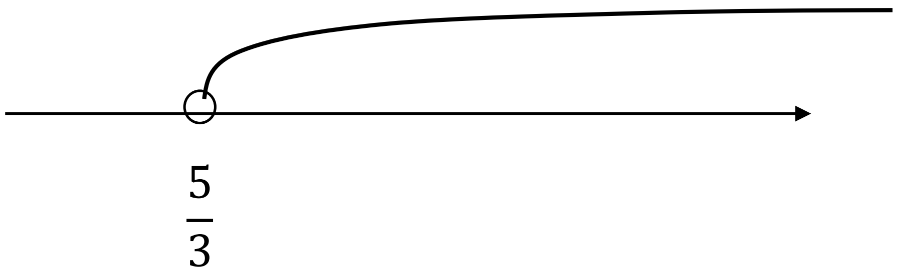
Разделим обе части неравенства на выражение $\sqrt{19}-4{,}5$, сменив знак неравенства на противоположный.

$5-3x<0$

$-3x<-5$

$x>-5:(-3)$

$x>\frac{5}{3}$



Ответ: $\left(\frac{5}{3};+\infty\right)$

ПРИМЕР 20.

Решить неравенство: $(x-7)^2 < \sqrt{11}(x-7)$

<u>Решение:</u>

$(x-7)^2 < \sqrt{11}(x-7)$

$(x-7)^2 - \sqrt{11}(x-7) < 0$

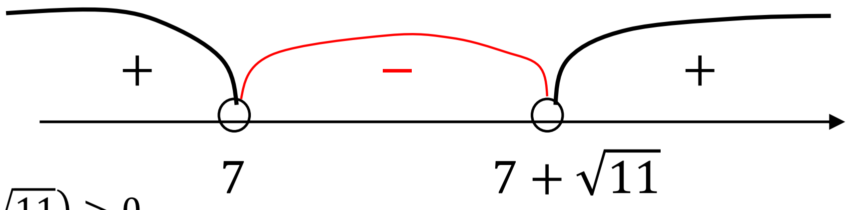
$(x-7)(x-7-\sqrt{11}) < 0$

Решим неравенство методом интервалов, для этого найдем корни уравнения

$(x-7)\left(x-7-\sqrt{11}\right) = 0$

$x-7=0$ или $x-7-\sqrt{11}=0$

$x=7$ $\quad x=7+\sqrt{11}$



Определим знаки выражения $(x-7)\left(x-7-\sqrt{11}\right)$ на каждом из промежутков $(-\infty;7), \left(7;7+\sqrt{11}\right), (7+\sqrt{11};+\infty)$

$x=0 \in (-\infty;7)$ $\quad (0-7)\left(0-7-\sqrt{11}\right) = (-7)\cdot\left(-7-\sqrt{11}\right) = 7\cdot\left(7+\sqrt{11}\right) > 0$

$x=8 \in \left(7;7+\sqrt{11}\right)$ $\quad (8-7)\left(8-7-\sqrt{11}\right) = 1\cdot\left(1-\sqrt{11}\right) = 1-\sqrt{11} < 0$

$x=11 \in \left(7+\sqrt{11};+\infty\right)$ $\quad (11-7)\left(11-7-\sqrt{11}\right) = 4\cdot\left(4-\sqrt{11}\right) > 0$

Ответ: $(7;7+\sqrt{11})$

ПРИМЕР 21.

Решить неравенство:

$x^2(-x^2-64)\le 64(-x^2-64)$

<u>Решение:</u>

$x^2(-x^2-64)\le 64(-x^2-64)$

$x^2(-x^2-64)-64(-x^2-64)\le 0$

$(-x^2-64)(x^2-64)\le 0$

Т.к. $-x^2-64<0$ при любых значениях x неравенство $(-x^2-64)(x^2-64)\le 0$ равносильно неравенству $x^2-64\ge 0$

Решим неравенство методом интервалов, для этого найдем корни уравнения

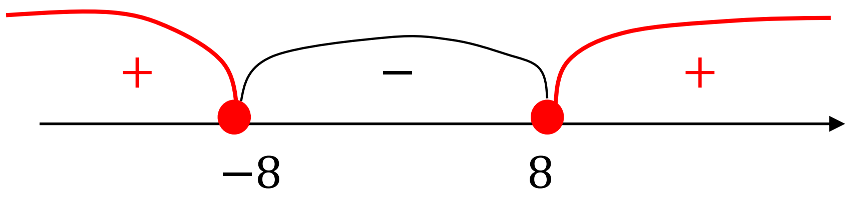
$x^2-64=0$

$(x-8)(x+8)=0$

$x-8=0$ или $x+8=0$

$x=8$ $\quad x=-8$

Определим знаки выражения $(x-8)(x+8)$ на каждом из промежутков $(-\infty;-8),(-8;8),(8;+\infty)$



$x=-9\in(-\infty;-8)$ $\quad (-9-8)(-9+8)=(-17)\cdot(-1)>0$

$x=0\in(-8;8)$ $\quad (0-8)(0+8)=(-8)\cdot 8<0$

$x=9\in(8;+\infty)$ $\quad (9-8)(9+8)=1\cdot 17>0$

Ответ: $(-\infty;-8],[8;+\infty)$

ПРИМЕР 22.

Решить неравенство: $\frac{-17}{x^2+2x-3} \le 0$

<u>Решение:</u>

$$\frac{-17}{x^2+2x-3} \le 0$$

Т. к. $-17 < 0$ и $x^2+2x-3 \ne 0$, то исходному неравенству равносильным будет неравенство $x^2+2x-3 > 0$

Решим неравенство методом интервалов, для этого найдем корни уравнения

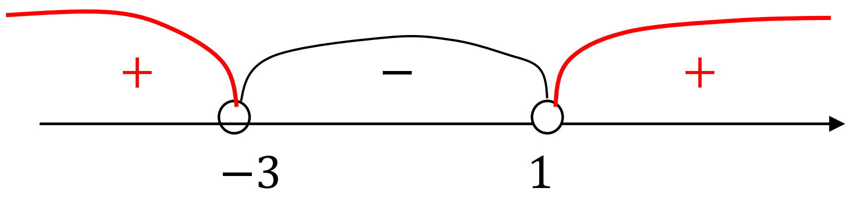
$x^2+2x-3 = 0$

$D = b^2 - 4ac = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3) = 4 + 12 = 16 > 0$

Уравнение имеет два корня:

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{D}}{2a} = \frac{-2-\sqrt{16}}{2 \cdot 1} = \frac{-2-4}{2} = \frac{-6}{2} = -3$$

$$x_2 = \frac{-b+\sqrt{D}}{2a} = \frac{-2+\sqrt{16}}{2 \cdot 1} = \frac{-2+4}{2} = \frac{2}{2} = 1$$



Определим знаки выражения x^2+2x-3 на каждом из промежутков $(-\infty;-3), (-3;1), (1;+\infty)$

$x = -4 \in (-\infty;-3)$ $\quad (-4)^2 + 2 \cdot (-4) - 3 = 16 - 8 - 3 = 5 > 0$

$x = 0 \in (-3;1)$ $\quad 0^2 + 2 \cdot 0 - 3 = -3 < 0$

$x = 2 \in (1;+\infty)$ $\quad 2^2 + 2 \cdot 2 - 3 = 4 + 4 - 3 = 5 > 0$

Ответ: $(-\infty;-3), (1;+\infty)$

ПРИМЕР 23.

Решить неравенство:

$$\frac{-13}{(x-4)^2-6} \geq 0$$

<u>Решение:</u>

$$\frac{-13}{(x-4)^2-6} \geq 0$$

Т. к. $-13 < 0$ и $(x-4)^2-6 \neq 0$, то исходному неравенству равносильным будет неравенство

$(x-4)^2-6 < 0$

Решим неравенство методом интервалов, для этого найдем корни уравнения

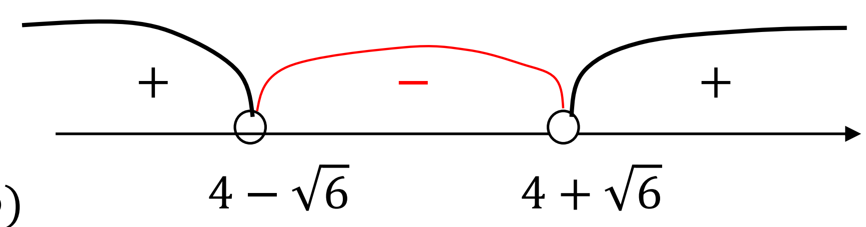
$(x-4)^2-6 = 0$

$(x-4)^2 = 6$

$x - 4 = \sqrt{6}$ $\qquad x - 4 = -\sqrt{6}$

$x = 4 + \sqrt{6}$ $\qquad x = 4 - \sqrt{6}$

Определим знаки выражения $(x-4)^2-6$ на каждом из промежутков $\left(-\infty; 4-\sqrt{6}\right), \left(4-\sqrt{6}; 4+\sqrt{6}\right), \left(4+\sqrt{6}; +\infty\right)$



$x = 0 \in \left(-\infty; 4-\sqrt{6}\right)$ $\qquad (0-4)^2 - 6 = 10 > 0$

$x = 4 \in \left(4-\sqrt{6}; 4+\sqrt{6}\right)$ $\qquad (4-4)^2 - 6 = -6 < 0$

$x = 7 \in \left(4+\sqrt{6}; +\infty\right)$ $\qquad (7-4)^2 - 6 = 3 > 0$

Ответ: $\left(4-\sqrt{6};\ 4+\sqrt{6}\right)$

ПРИМЕР 24.

Решить систему неравенств: $\begin{cases} 2(3x+5)-7(2x+3) > 3x, \\ (x-4)(x+7) < 0 \end{cases}$

<u>Решение:</u>

Решим первое неравенство системы.

$2(3x+5)-7(2x+3) > 3x$

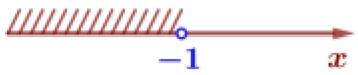
$6x+10-14x-21 > 3x$

$6x-14x-3x > 21-10$

$-11x > 11$

$x < 11 : (-11)$

$x < -1$



Решим второе неравенство системы.

$(x-4)(x+7) < 0$

Рассмотрим функцию $f(x) = (x-4)(x+7)$

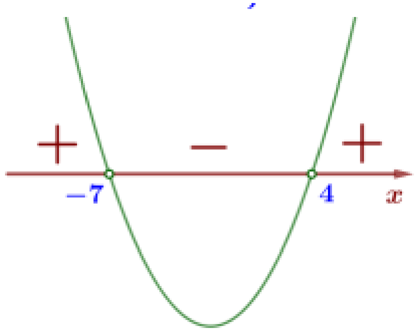
График функции - парабола, ветви направлены вверх

Нули функции:

$(x-4)(x+7) = 0$

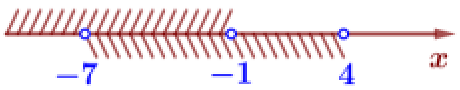
$x-4=0$ или $x+7=0$

$x=4$ $\qquad$ $x=-7$



Вернемся к системе: $\begin{cases} x < -1, \\ -7 < x < 4 \end{cases}$

Изобразим на координатной прямой множество чисел, удовлетворяющее неравенству $x < -1$, и множество чисел, удовлетворяющих неравенству $-7 < x < 4$ выясним, что оба неравенства верны при $-7 < x < -1$



Ответ: $(-7; -1)$

ПРИМЕР 25.

Решить систему неравенств:

$$\begin{cases} \dfrac{10-2x}{3+(5-2x)^2} \geq 0, \\ 2-7x \leq 14-3x \end{cases}$$

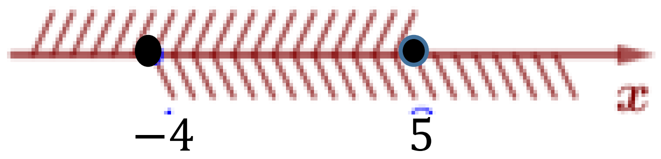
<u>Решение:</u>

Т. к. $3+(5-2x)^2 > 0$, то неравенство $\dfrac{10-2x}{3+(5-2x)^2} \geq 0$ равносильно неравенству $10-2x \geq 0$,

а исходная система равносильна системе:

$$\begin{cases} 10-2x \geq 0, \\ 2-7x \leq 14-3x \end{cases} => \begin{cases} -2x \geq -10, \\ -7x+3x \leq 14-2 \end{cases} => \begin{cases} x \leq -10:(-2), \\ -4x \leq 12 \end{cases} => \begin{cases} x \leq 5, \\ x \geq 12:(-3) \end{cases} => \begin{cases} x \leq 5, \\ x \geq -4 \end{cases}$$

Изобразим на координатной прямой множество чисел, удовлетворяющее неравенству $x \leq 5$, и множество чисел, удовлетворяющих неравенству $x \geq -4$ выясним, что оба неравенства верны при $-4 \leq x \leq 5$



Ответ: $[-4; 5]$

Задачи для самостоятельного решения

$(x-1)(3x-5)<1;$

$(2x+1)(x-1)>9;$

$(3x-2)(x+4)>-11;$

$\frac{x^2}{2}<\frac{2x+2}{3};$

$\frac{x^2}{3}\geq\frac{8x-9}{5};$

$\frac{x^2}{2}<\frac{11x-4}{5}.$

$(x-5)^2<\sqrt{7}(x-5);$

$(x-6)^2<\sqrt{10}(x-6);$

$(x-3)^2<\sqrt{5}(x-3);$

$(5x-8)^2\geq(8x-5)^2;$

$(3x-5)^2\geq(5x-3)^2;$

$(2x-7)^2\geq(7x-2)^2.$

$\frac{-19}{x^2+x-12}\leq 0;$

$\frac{-25}{x^2+9x-10}\leq 0;$

$\frac{-23}{x^2+6x-16}\leq 0;$

$$\begin{cases}\frac{3-x}{1+(5-x)^2}\geq 0,\\ 8-7x\leq 12-3x;\end{cases}$$

$$\begin{cases}4(9x+3)-9(4x+3)>3x,\\ (x-2)(x+9)<0;\end{cases}$$

Спасибо за внимание!

Успехов в решении неравенств!