

# Геометрические задачи – ОГЭ-2024

Попова Елена Юрьевна,  
учитель математики  
МАОУ СОШ № 5  
города Тюмени

Научить решать учащихся геометрические задачи - это значит не только подготовить их к хорошей сдаче экзамена, но и научить их логически мыслить, доказательно отстаивать свою точку зрения, уметь творчески подходить к любому делу.

# Структура ОГЭ-2024

## (геометрические задания 1 части)

**15.** Нахождение геометрических величин (треугольники, четырёхугольники, многоугольники и их элементы)

**16.** Нахождение геометрических величин (окружность, круг, центральные и вписанные углы, касательная, хорда, секущая, радиус, окружность, описанная вокруг многоугольника и вписанная в многоугольник.)

**17.** Задачи на площади фигур.

**18.** Задачи с фигурами на квадратной решётке

**19.** Выбор верных или неверных утверждений (анализ геометрических высказываний)

В заданиях 1-5 также есть геометрические задачи (№3, №4) на нахождение площади или расстояния.

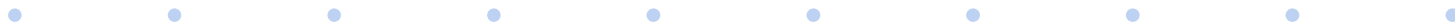


## Структура ОГЭ-2024 (геометрические задания 2 части)

23. Геометрическая задача на вычисление (Темы, которые встречаются в задании: углы, треугольники, четырёхугольники, окружности)

24. Задача по геометрии на доказательство (Темы, которые встречаются в задании: правильные многоугольники, треугольники и их элементы, четырёхугольники и их элементы, окружности и их элементы)

25. Геометрическая задача повышенной сложности (Темы, которые встречаются в задании: треугольники, четырёхугольники, окружности, комбинация многоугольников и окружностей)



# Спецификация КИМ ОГЭ 2024 г.

## Основные проверяемые требования к математической подготовке

Умение применять формулы периметра и площади многоугольников, длины окружности и площади круга, объёма прямоугольного параллелепипеда; умение применять признаки равенства треугольников, теорему о сумме углов треугольника, теорему Пифагора, тригонометрические соотношения для вычисления длин, расстояний, площадей

Умение распознавать истинные и ложные высказывания

# Статистический анализ выполнения заданий КИМ ОГЭ в 2023 году

Номер задания в КИМ	Проверяемые элементы содержания / умения	Уровень сложности задания	Средний процент выполнения	Процент выполнения по региону в группах, получивших отметку			
				«2»	«3»	«4»	«5»
15	Уметь выполнять действия с геометрическими фигурами, координатами и векторами.	Б	63,7	23,8	52,8	86,1	98,8
16	Уметь выполнять действия с геометрическими фигурами, координатами и векторами.	Б	53,7	3	39,2	83,7	97,1
17	Уметь выполнять действия с геометрическими фигурами, координатами и векторами.	Б	82,6	17,7	84,3	97,2	98,9
18	Уметь выполнять действия с геометрическими фигурами, координатами и векторами.	Б	81,2	29,6	80	95,8	99
19	Проводить доказательные рассуждения при решении задач, оценивать логическую правильность рассуждений, распознавать ошибочные заключения.	Б	62,1	31,9	56,4	75,2	89,8

## Статистический анализ выполнения заданий КИМ ОГЭ в 2023 году

Номер задания в КИМ	Проверяемые элементы содержания / умения	Уровень сложности задания	Средний процент выполнения	Процент выполнения по региону в группах, получивших отметку			
				«2»	«3»	«4»	«5»
23	Уметь выполнять действия с геометрическими фигурами, координатами и векторами.	П	11,1	0	0,6	16,8	84,3
24	Проводить доказательные рассуждения при решении задач, оценивать логическую правильность рассуждений, распознавать ошибочные заключения.	П	4,3	0	0	2,9	53,1
25	Уметь выполнять действия с геометрическими фигурами, координатами и векторами.	В	0,3	0	0	0	5,6

По заданиям базового уровня содержательного раздела «Геометрия» учащиеся показали результаты от 53,7% до 82,6 % выполнения, что свидетельствует о достаточном уровне сформированности необходимых умений (уметь выполнять действия с геометрическими фигурами, координатами и векторами), однако на экзамене вызвало затруднение выполнение заданий с элементами окружности. Выполнение заданий 2 части №№23-25 повышенного и высокого уровня показало сохранение высокого уровня затруднений учащихся, что необходимо учесть в последующей подготовке к ОГЭ 2024 года





Трудности в решении геометрических задач связаны с тем, что редко какая задача в геометрии может быть решена только с использованием определенной формулы.

При решении большинства задач не обойтись без привлечения разнообразных фактов теории, доказательств тех или иных утверждений, справедливых лишь при определенном расположении элементов фигур.

## **Трудности решения геометрических задач**

- Не существует единых алгоритмов решения
- Необходимость выбора метода решения задачи и теоремы для решения конкретной задачи (нескольких теорем) из большого набора известных фактов
- Нужно решить довольно много задач, чтобы научиться их решать.



# Причины ошибок в решении геометрических задач

Незнание и/или непонимание аксиом, определений, теорем

Неумение их применять.

Невнимательное чтение условия и вопроса задания.

Вычислительные ошибки.

Нарушения логики в рассуждениях.

Принятие ошибочных гипотез.

Недостатки в работе с рисунком.

# Необходимые условия успеха при решении задач по геометрии

Уверенное владение основными понятиями и их свойствами (определения, аксиомы, теоремы, базовые задачи)

Знание основных методов и приёмов решения задач

Умение комбинировать методы и приёмы решения задач

Наличие опыта решения задач



# Специфические особенности методов решения геометрических задач

Большое разнообразие

Взаимозаменяемость

Трудность формального описания

Отсутствие чётких границ применения (в отличие от алгебры)

Использование комбинаций методов и приёмов.



В задачах на вычисление требуется, как правило, использовать известные теоремы и формулы. Затруднения у школьников часто возникают при выборе нужного геометрического факта.

Учащимся можно предложить, например, следующую схему решения задач на вычисление:

1. Получив задачу, первое, что нужно сделать, - разобраться, что это за задача, каковы её условия, в чем состоят её требования, т.е. провести анализ задачи. Этот анализ и составляет первый этап процесса решения задачи.
2. Выполнить схематический чертеж к задаче. Выполняя чертеж (рисунок) надо стремиться сделать его соответствующим условиям задачи. Хороший чертеж – это удобный для восприятия наглядный способ записи условия задачи, он может стать помощником в решении задачи, подсказать правильный ход рассуждений. В тоже время надо отчетливо понимать, что даже самый аккуратный чертеж сам по себе ничего не доказывает. Все, что увидено из чертежа, должно быть обосновано соответствующим логическим выводом.

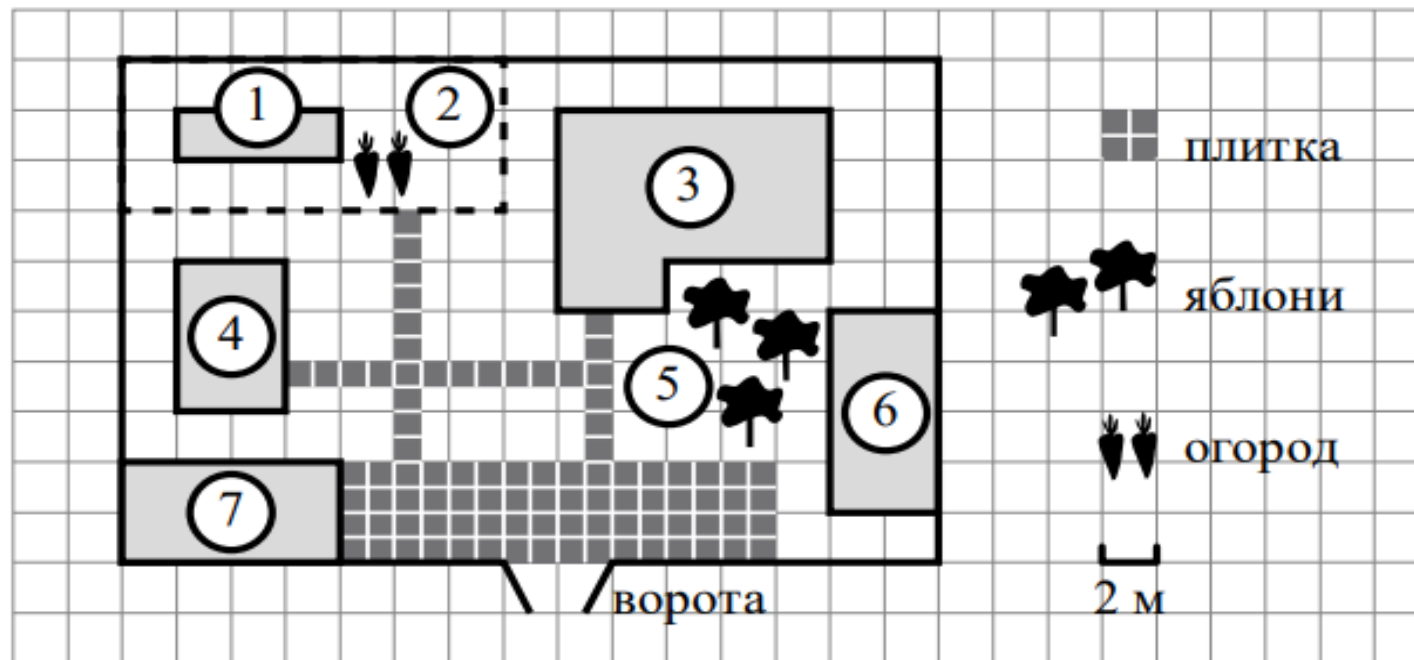
3. Выбрать теоретические сведения, необходимые для решения задачи.

Начиная решать задачу, использовать определения и свойства входящих в задачу данных и искомых элементов, вести рассуждения, например:

треугольник равнобедренный, следовательно, ..., две касательные проведены из одной точки, следовательно, ..., окружность описана около прямоугольного треугольника, следовательно, ... и т.п. Вспомнить теоремы, в которых связаны данные и искомые элементы задачи, вспомнить похожие задачи.

4. Анализ задачи и построение её схематической записи необходимо для того, чтобы найти способ решения задачи. Когда способ решения задачи найден, необходимо его осуществить.





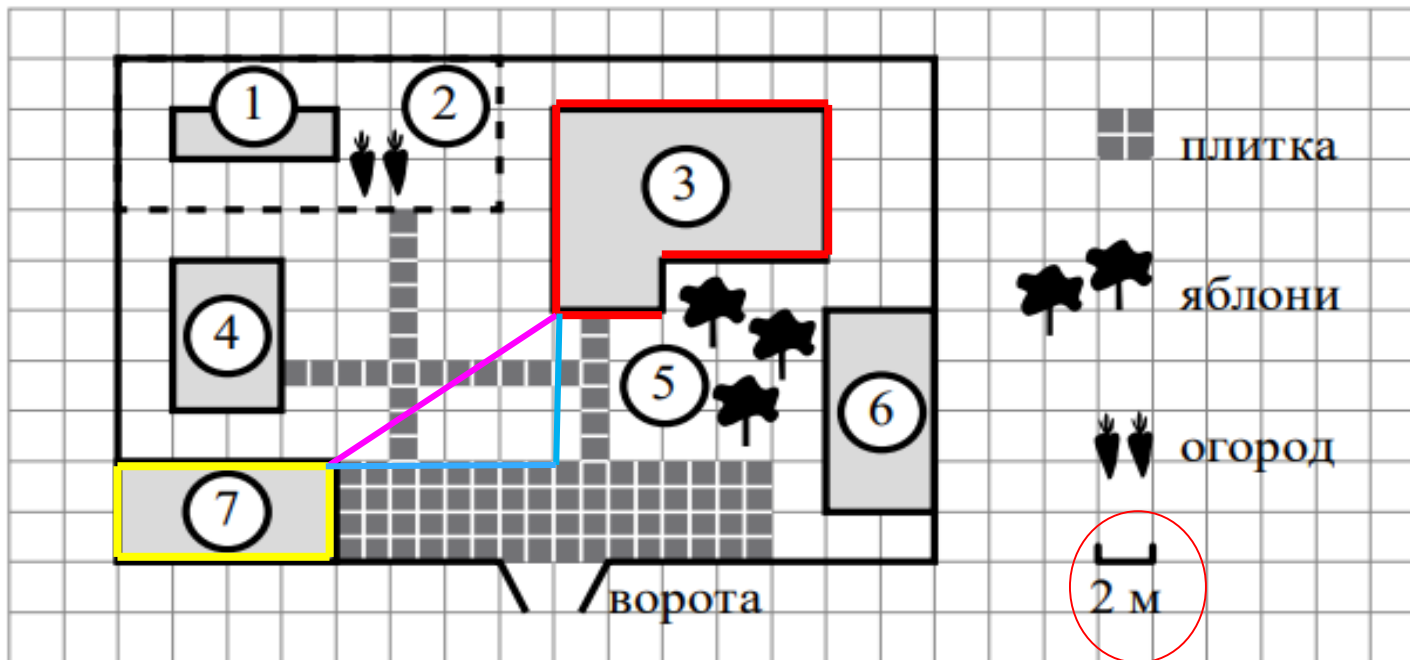
На плане изображено домохозяйство по адресу: с. Авдеево, 3-й Поперечный пер., д. 13 (сторона каждой клетки на плане равна 2 м). Участок имеет прямоугольную форму. Выезд и въезд осуществляются через единственные ворота.

При входе на участок справа от ворот находится баня, а слева – гараж, отмеченный на плане цифрой 7. Площадь, занятая гаражом, равна 32 кв. м.

Жилой дом находится в глубине территории. Помимо гаража, жилого дома и бани, на участке имеется сарай (подсобное помещение), расположенный рядом с гаражом, и теплица, построенная на территории огорода (огород отмечен цифрой 2). Перед жилым домом имеются яблоневые посадки.

Все дорожки внутри участка имеют ширину 1 м и вымощены тротуарной плиткой размером 1 м × 1 м. Между баней и гаражом имеется площадка площадью 64 кв. м, вымощенная такой же плиткой.

К домохозяйству подведено электричество. Имеется магистральное газоснабжение.



3 Найдите площадь, которую занимает жилой дом. Ответ дайте в квадратных метрах.

17 клеток, площадь одной клетки 4 кв.м,  
Площадь дома -  $17 \cdot 4 = 68$

Ответ: 68.

4 Найдите расстояние от жилого дома до гаража (расстояние между двумя ближайшими точками по прямой) в метрах.

Искомое расстояние – это гипотенуза треугольника.

Ответ: 10 По т. Пифагора имеем расстояние 5 клеток или 10 м



## Задание № 15 (ОГЭ – 2024)

Треугольники, четырехугольники, многоугольники  
и их элементы.

- Углы
- Треугольники общего вида
- Равнобедренные треугольники
- Прямоугольные треугольники
- Параллелограмм
- Ромб
- Трапеция
- Многоугольники

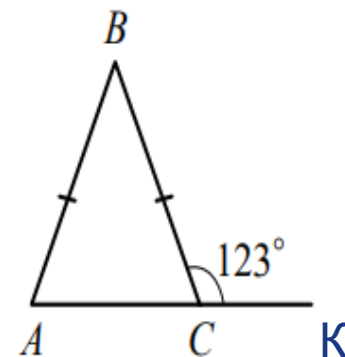


## Демонстрация задания 15 ( проект ОГЭ-2024)

15

В равнобедренном треугольнике  $ABC$  с основанием  $AC$  внешний угол при вершине  $C$  равен  $123^\circ$ . Найдите величину угла  $BAC$ . Ответ дайте в градусах.

Ответ: \_\_\_\_\_.



$\triangle ABC$  – равнобедренный, значит угол  $BAC$  равен углу  $BCA$ .

Углы  $BCK$  и  $BCA$  – смежные.

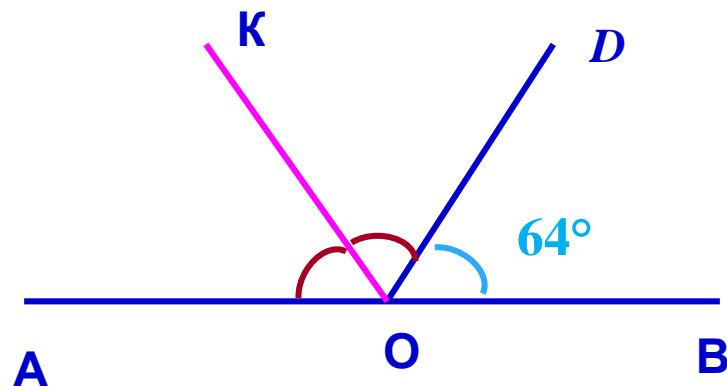
$$\angle BCK + \angle BCA = 180^\circ$$

$$\angle BCA = 180^\circ - \angle BCK = 180^\circ - 123^\circ = 57^\circ$$

$$\angle BAC = 57^\circ$$

**Ответ: 57**

Найдите величину угла  $\angle AOK$ , если  $OK$  — биссектриса угла  $\angle AOD$ ,  $\angle DOB = 64^\circ$ . Ответ дайте в градусах.



Углы  $\angle AOD$  и  $\angle DOB$  — смежные, вместе составляют развёрнутый угол, следовательно,  $\angle AOD = 180^\circ - \angle DOB = 180^\circ - 64^\circ = 116^\circ$ .

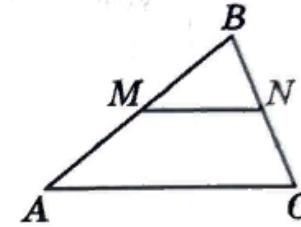
Поскольку  $OK$  — биссектриса угла  $\angle AOD$ , то

$$\angle AOK = \angle DOK = \angle AOD / 2 = 116^\circ / 2 = 58^\circ.$$

Необходимо знать:

1. Сумма смежных углов  $180^\circ$
2. Биссектриса делит угол пополам

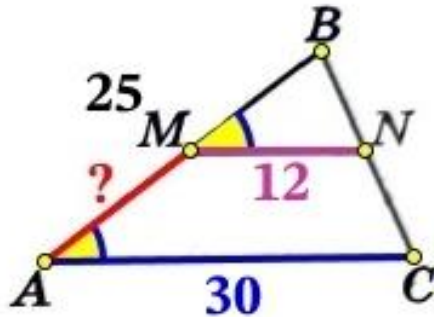
Прямая, параллельная стороне AC треугольника ABC, пересекает стороны AB и BC в точках M и N соответственно, AB = 25, AC = 30, MN = 12. Найдите AM.



## Решение

Рассмотрим  $\triangle BMN$  и  $\triangle ABC$ , в них  $\angle B$  общий,  $\angle BMN = \angle BAC$ , как соответственные при двух параллельных прямых  $MN \parallel AC$  и секущей BA.

$\triangle BMN$  и  $\triangle ABC$  подобны по двум равным углам. Значит пропорциональны соответствующие стороны:



$$\frac{MN}{AC} = \frac{BM}{AB}$$

$$\frac{12}{30} = \frac{BM}{25}$$

$$\frac{6}{15} = \frac{BM}{25}$$

$$15 \cdot BM = 6 \cdot 25 \quad | :5$$

$$3 \cdot BM = 6 \cdot 5 \quad | :3$$

$$1 \cdot BM = 2 \cdot 5$$

$$BM = 2 \cdot 5 = 10$$

Найдём AM:

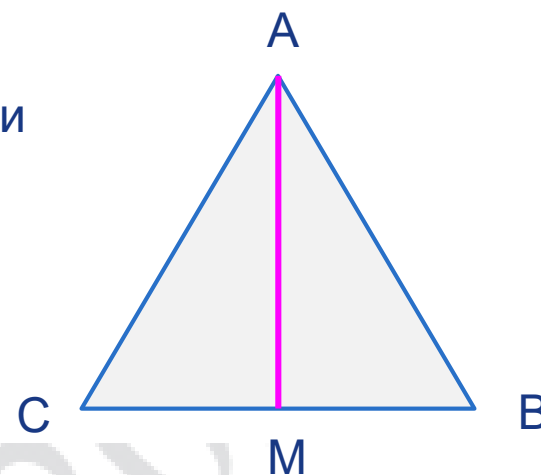
$$AM = AB - BM = 25 - 10 = 15$$

Ответ: 15.

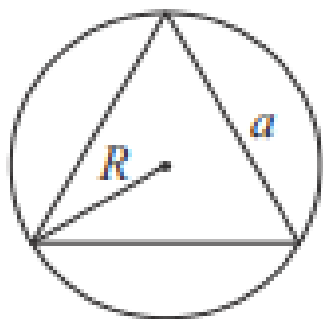
Сторона равностороннего треугольника равна  $14\sqrt{3}$ . Найдите биссектрису этого треугольника.

В равностороннем треугольнике биссектрисы, высоты и медианы совпадают.

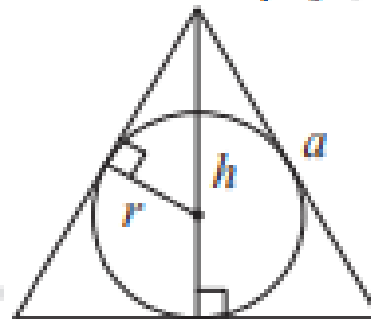
AM – высота, медиана и биссектриса



Описанная и вписанная окружности правильного треугольника



$$R = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$
$$S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$



$$r = \frac{a\sqrt{3}}{6}$$

$$h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

$$AM = \frac{14\sqrt{3}\sqrt{3}}{2} = 21$$

На стороне  $BC$  прямоугольника  $ABCD$ , у которого  $AB = 12$  и  $AD = 17$ , отмечена точка  $E$  так, что  $\angle EAB = 45^\circ$ . Найдите  $ED$ .

Решение.

Треугольник  $ABE$  — прямоугольный, угол  $EAB$  равен  $45^\circ$ , поскольку сумма углов треугольника равна  $180^\circ$ , угол  $BEA$  равен  $180^\circ - 90^\circ - 45^\circ = 45^\circ$

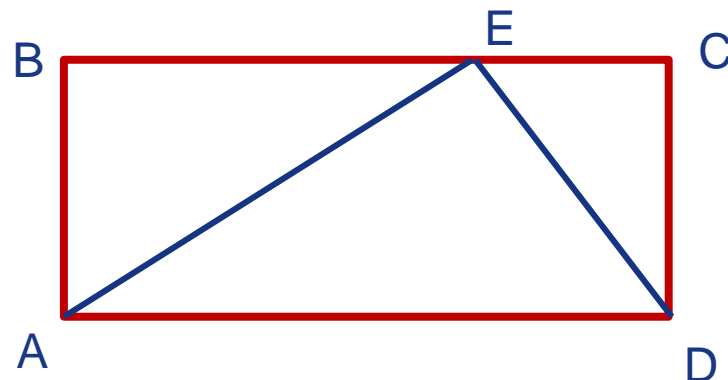
Следовательно, треугольник  $ABE$  — равнобедренный, поэтому  $AB = BE = 12$ .

Найдём отрезок  $CE$ :

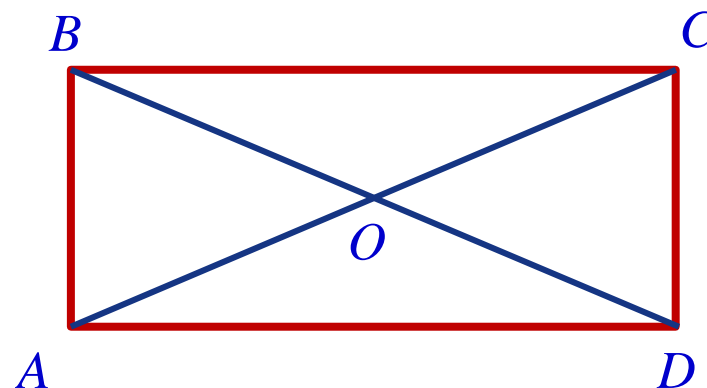
$CE = BC - BE = 17 - 12 = 5$ .

Из прямоугольного треугольника  $CED$  найдём  $ED$  по теореме Пифагора:

$$ED = \sqrt{CE^2 + CD^2} = \sqrt{CE^2 + AB^2} = \sqrt{5^2 + 12^2} = 13.$$



Диагонали  $AC$  и  $BD$  прямоугольника  $ABCD$  пересекаются в точке  $O$ ,  $BO = 7$ ,  $AB = 6$ . Найдите  $AC$ .



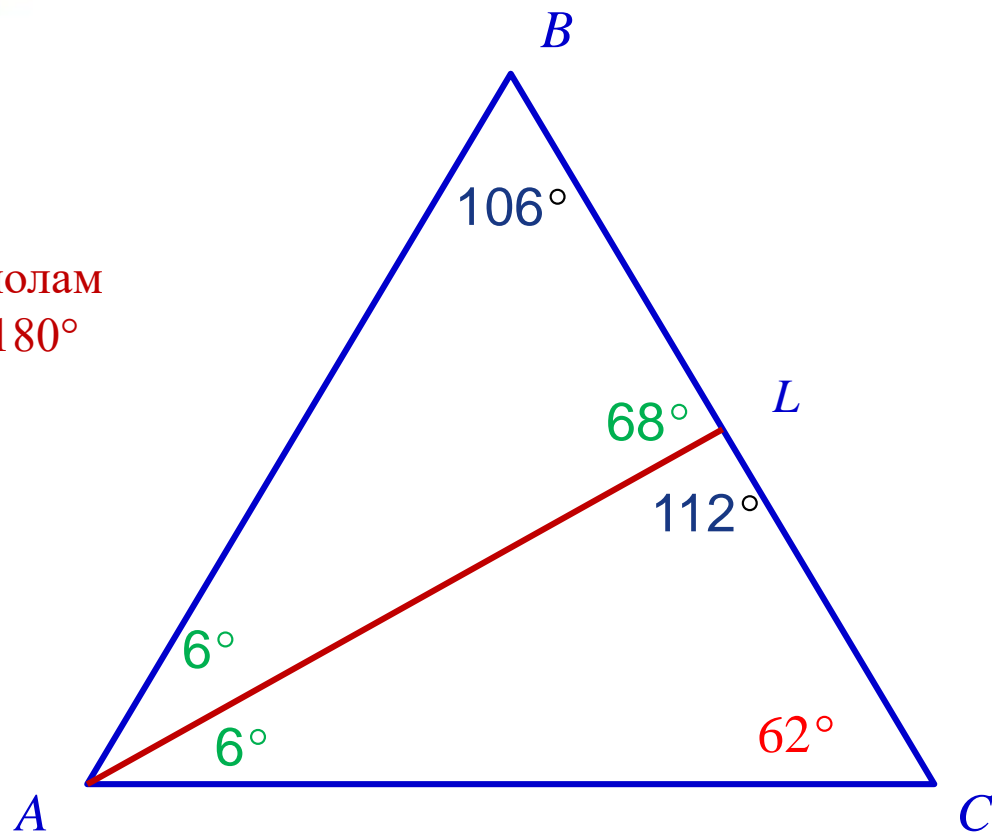
Диагонали в прямоугольнике равны и точкой пересечения делятся пополам значит,  $AC = BD = 2BO = 14$ .



В треугольнике  $ABC$  проведена биссектриса  $AL$ , угол  $ALC$  равен  $112^\circ$ , угол  $ABC$  равен  $106^\circ$ . Найдите угол  $ACB$ . Ответ дайте в градусах.

Необходимо знать:

1. Сумма смежных углов  $180^\circ$
2. Биссектриса делит угол пополам
3. Сумма углов треугольника  $180^\circ$

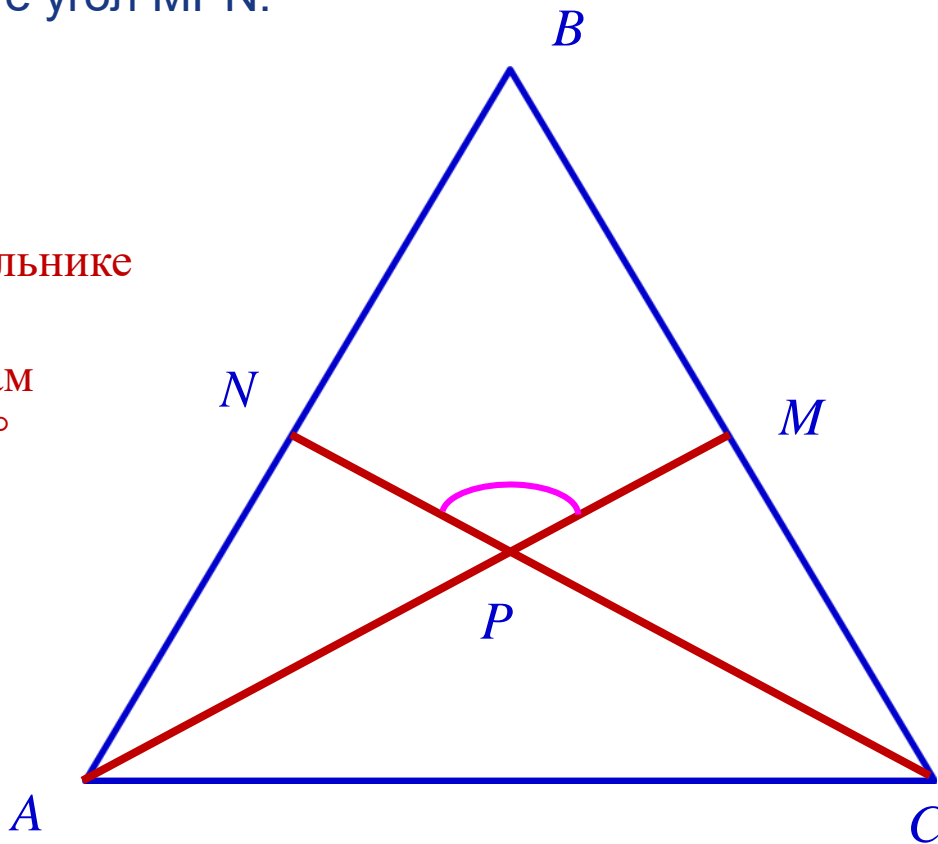




В равностороннем треугольнике  $ABC$  биссектрисы  $CN$  и  $AM$  пересекаются в точке  $P$ . Найдите угол  $MPN$ .

Необходимо знать:

1. Углы в равностороннем треугольнике равны  $60^\circ$
2. Биссектриса делит угол пополам
3. Сумма углов треугольника  $180^\circ$
4. Вертикальные углы равны



## Задание № 16 (ОГЭ – 2024)

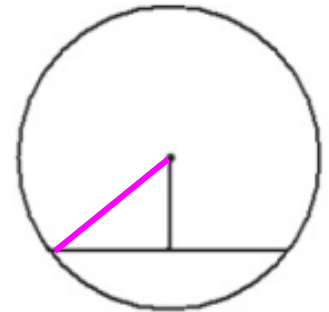
### Окружность, круг и их элементы.

- Центральные и вписанные углы
- Касательная, хорда, секущая, радиус
- Окружность, описанная вокруг многоугольника



## Демонстрация задания 16 ( проект ОГЭ-2024)

**16** Найдите длину хорды окружности радиусом 13, если расстояние от центра окружности до хорды равно 5.



Ответ: \_\_\_\_\_.

Расстояние от центра до хорды – это длина перпендикуляра. Построим радиус окружности. Мы получили прямоугольный треугольник. Найдём нижний катет по т. Пифагора. Тогда, чтобы найти всю хорду, надо результат умножить на 2, так как основание перпендикуляра падает в середину хорды.

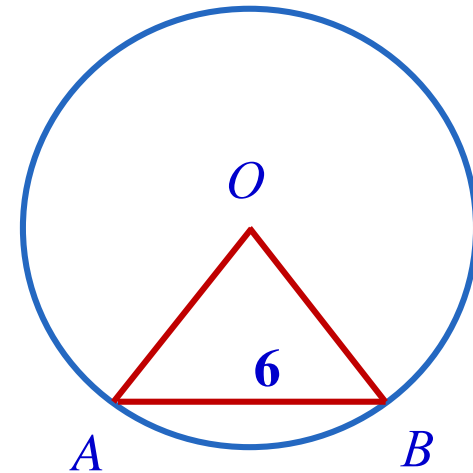
$$\sqrt{169 - 25} = \sqrt{144} = 12$$

$$12 \cdot 2 = 24$$

Центральный угол  $\text{AOB}$  опирается на хорду  $\text{AB}$  длиной 6. При этом угол  $\text{OAB}$  равен  $60^\circ$ . Найдите радиус окружности.

Необходимо знать:

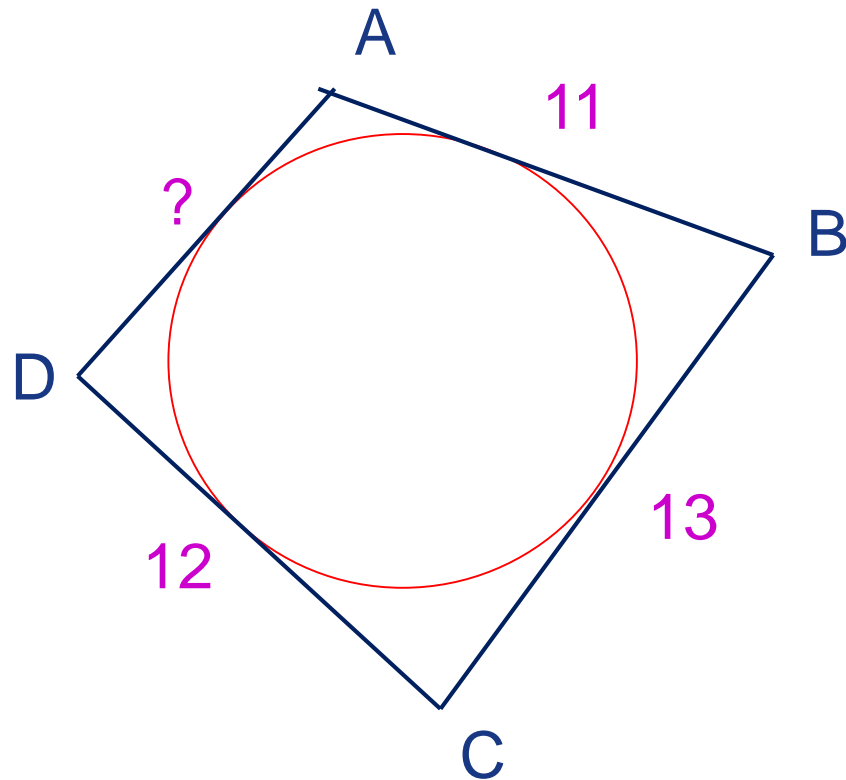
1. Углы в равностороннем треугольнике равны  $60^\circ$
2. Сумма углов треугольника  $180^\circ$
3. Углы при основании равнобедренного треугольника равны.



Четырёхугольник  $ABCD$  описан около окружности,  $AB = 11$ ,  $BC = 13$ ,  $CD = 12$ .

Найдите  $AD$ .

Суммы длин  
противоположных  
сторон  
четырёхугольника,  
описанного около  
окружности равны.  
 $AB + DC = AD + BC$   
 $11 + 12 = AD + 13$   
 $AD = 23 - 13 = 10$

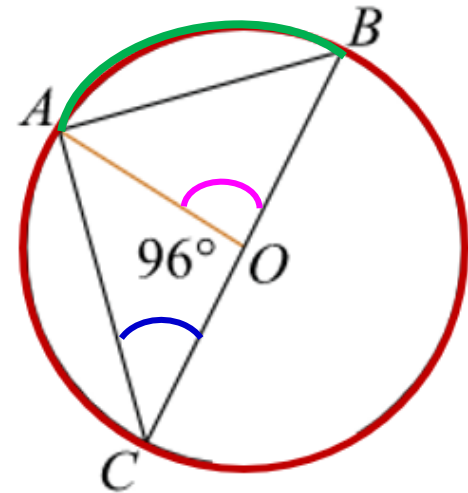


Ответ: 10

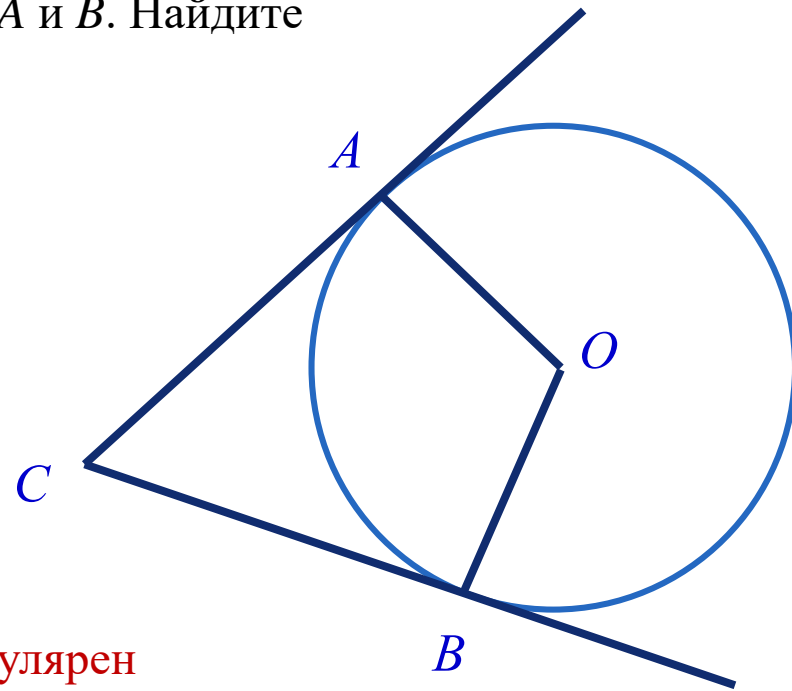
Найдите градусную меру  $\angle ACB$ , если известно, что  $BC$  является диаметром окружности, а градусная мера центрального  $\angle AOC$  равна  $96^\circ$ .

Необходимо знать:

1. Вписанный треугольник, у которого одна из сторон диаметр, является прямоугольным
2. Сумма смежных углов  $180^\circ$
3. Градусная мера центрального угла в 2 раза больше градусной меры вписанного угла, опирающегося на ту же дугу.



В угол  $C$  величиной  $83^\circ$  вписана окружность с центром  $O$ , которая касается сторон угла в точках  $A$  и  $B$ . Найдите угол  $AOB$ . Ответ дайте в градусах.



Необходимо знать

1. Радиус окружности перпендикулярен касательной в точке касания
2. Сумма углов четырёхугольника равна  $360^\circ$

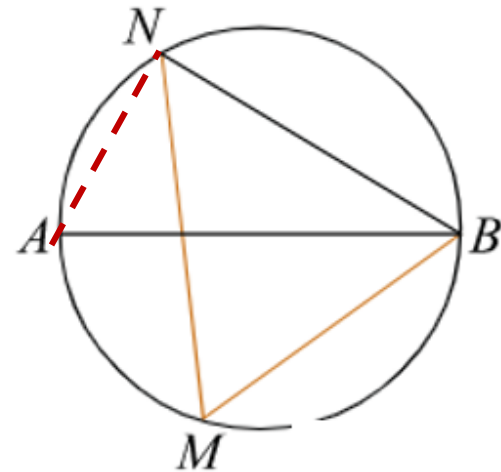
Ответ:  $97^\circ$



На окружности по разные стороны от диаметра  $AB$  взяты точки  $M$  и  $N$ . Известно, что  $\angle NBA = 38^\circ$ . Найдите угол  $NMB$ . Ответ дайте в градусах.

Угол  $NBA$  — вписанный, поэтому он равен половине дуги, на которую он опирается. Следовательно, дуга  $AN = 2\angle NBA = 2 \cdot 38^\circ = 76^\circ$ . Диаметр  $AB$  делит окружность на две равные части, поэтому величина дуги  $ANB$  равна  $180^\circ$ . Откуда дуга  $NB = 180^\circ - 76^\circ = 104^\circ$ .

Угол  $NMB$  — вписанный, поэтому он равен половине дуги, на которую он опирается, то есть равен  $104^\circ/2 = 52^\circ$ .





# Задание № 17 (ОГЭ – 2023)

## Площади фигур

- Квадрат
- Прямоугольник
- Параллелограмм
- Треугольники общего вида
- Прямоугольный треугольник
- Равнобедренный треугольник
- Трапеция
- Площадь круга и его частей

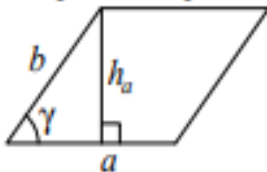
# Демонстрация задания 17 ( проект ОГЭ-2024)

17

Найдите площадь трапеции, изображённой на рисунке.

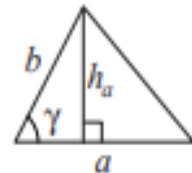
Площади фигур

Параллелограмм



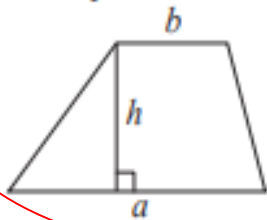
$$S = ah_a$$
$$S = absin \gamma$$

Треугольник



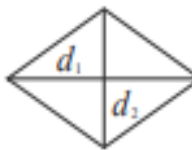
$$S = \frac{1}{2}ah_a$$
$$S = \frac{1}{2}absin \gamma$$

Трапеция



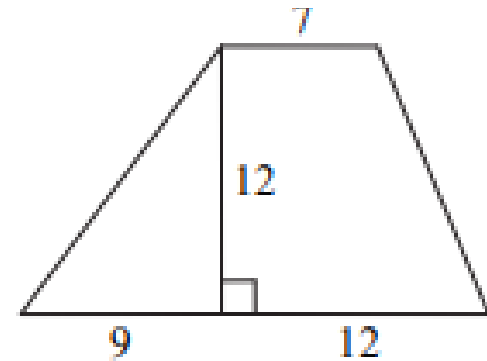
$$S = \frac{a+b}{2} \cdot h$$

Ромб



$d_1, d_2$  – диагонали

$$S = \frac{1}{2}d_1d_2$$



**Решение.** Площадь трапеции равна произведению полусуммы оснований на высоту:

$$S = \frac{7 + 9 + 12}{2} \cdot 12 = 168.$$

**Ответ: 168**

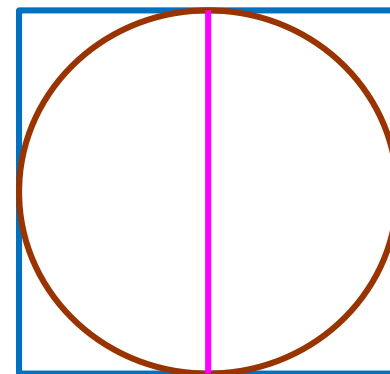
Найдите площадь квадрата, описанного вокруг окружности радиуса 7.

Решение.

Пусть  $r$  и  $D$  соответственно радиус и диаметр окружности,  $a$  — сторона квадрата. Сторона квадрата равна диаметру вписанной окружности.

$$a = D = 2r = 14$$

Найдём площадь квадрата:  $S = 196$



Найдите площадь прямоугольника, если его периметр равен 60, а отношение соседних сторон равно 4:11

Пусть одна часть равна  $x$

Периметр равен  $4x+11x+4x+11x = 30x$

По условию периметр равен 60. Значит

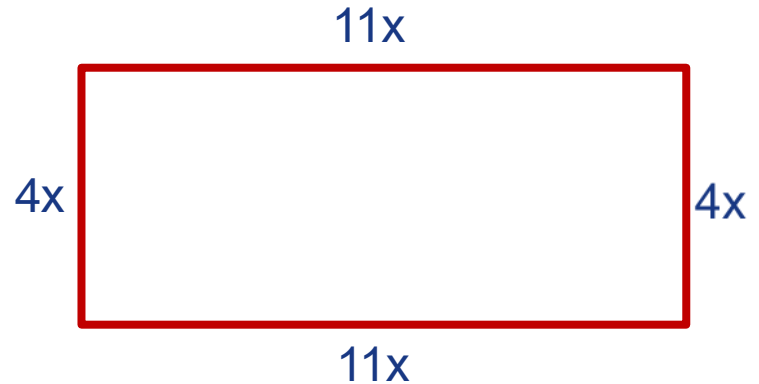
$$30x = 60$$

$$x = 2$$

То есть стороны прямоугольника равны

$$4 \cdot 2 = 8 \text{ и } 11 \cdot 2 = 22$$

Поэтому площадь равна  $22 \cdot 8 = 176$



### Способ решения («Решу ОГЭ»)

Площадь прямоугольника равна произведению его сторон. Найдём стороны прямоугольника. Пусть  $x$  — большая сторона прямоугольника, тогда другая сторона равна  $\frac{4}{11}x$ . Следовательно, периметр прямоугольника равен

$$2\left(x + \frac{4}{11}x\right) = 60,$$

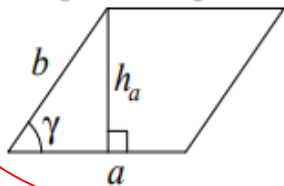
откуда  $\frac{15}{11}x = 30 \Leftrightarrow x = 22$ . Поэтому площадь прямоугольника равна  $22 \cdot \frac{4}{11} \cdot 22 = 176$ .



Одна из сторон параллелограмма равна 12, другая равна 5, а синус одного из углов равен  $\frac{1}{3}$ . Найдите площадь параллелограмма.

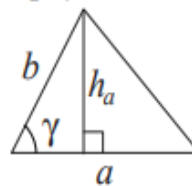
### Площади фигур

Параллелограмм



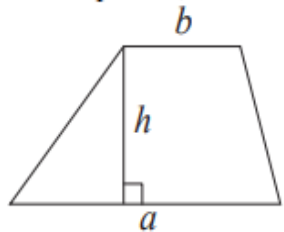
$$S = ah_a$$
$$S = ab \sin \gamma$$

Треугольник



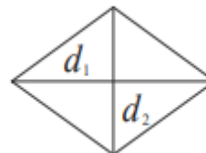
$$S = \frac{1}{2}ah_a$$
$$S = \frac{1}{2}ab \sin \gamma$$

Трапеция



$$S = \frac{a+b}{2} \cdot h$$

Ромб



$d_1, d_2$  — диагонали

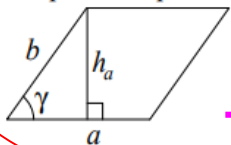
$$S = \frac{1}{2}d_1d_2$$

Решение  $12 \cdot 5 \cdot \frac{1}{3} = 20.$

Одна из сторон параллелограмма равна 12, другая равна 5, а косинус одного из углов равен  $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ . Найдите площадь параллелограмма.

Площади фигур

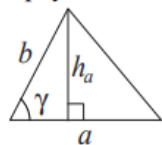
Параллелограмм



$$S = ah_a$$

$$S = absin\gamma$$

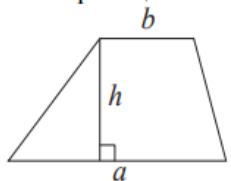
Треугольник



$$S = \frac{1}{2}ah_a$$

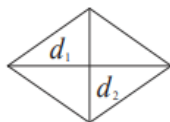
$$S = \frac{1}{2}absin\gamma$$

Трапеция



$$S = \frac{a+b}{2} \cdot h$$

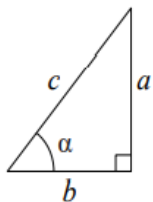
Ромб



$d_1, d_2$  — диагонали

$$S = \frac{1}{2}d_1d_2$$

Прямоугольный треугольник



$$\sin\alpha = \frac{a}{c}$$

$$\cos\alpha = \frac{b}{c}$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b}$$

Теорема Пифагора:  $a^2 + b^2 = c^2$

Основное тригонометрическое тождество:  $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

$$\sin\gamma = \sqrt{1 - \cos^2\gamma} = \frac{1}{3}$$

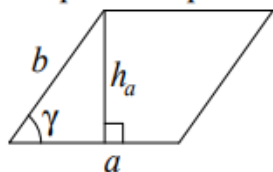
Тогда площадь параллелограмма будет равна.

$$12 \cdot 5 \cdot \frac{1}{3} = 20.$$

Найдите площадь ромба, если его диагонали равны 14 и 6.

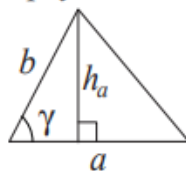
### Площади фигур

Параллелограмм



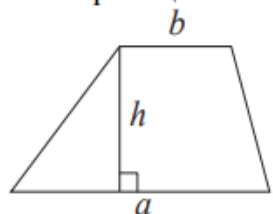
$$S = ah_a$$
$$S = ab \sin \gamma$$

Треугольник



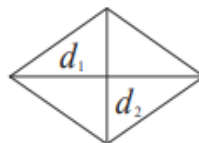
$$S = \frac{1}{2} ah_a$$
$$S = \frac{1}{2} ab \sin \gamma$$

Трапеция



$$S = \frac{a+b}{2} \cdot h$$

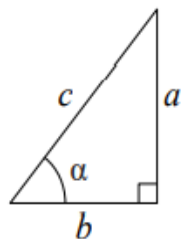
Ромб



$d_1, d_2$  — диагонали

$$S = \frac{1}{2} d_1 d_2$$

Прямоугольный треугольник



$$\sin \alpha = \frac{a}{c}$$

$$\cos \alpha = \frac{b}{c}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b}$$

Площадь ромба  
равна

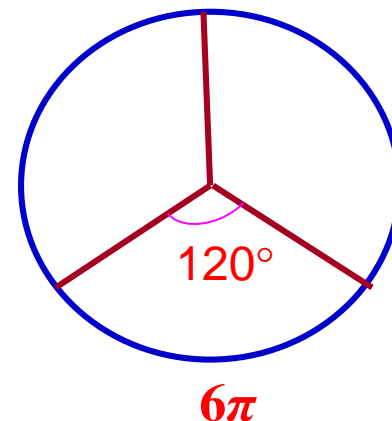
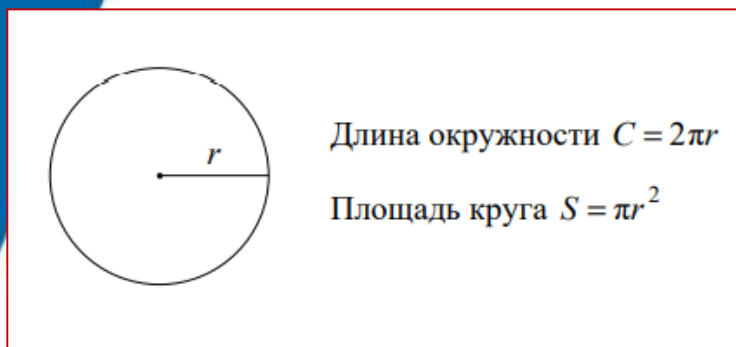
$$S = \frac{1}{2} 14 \cdot 6 = 42$$

Теорема Пифагора:  $a^2 + b^2 = c^2$

Основное тригонометрическое тождество:  $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$

Найдите площадь кругового сектора, если длина ограничивающей его дуги равна  $6\pi$ , а угол сектора равен  $120^\circ$ . В ответе укажите площадь, *деленную на  $\pi$* .

Площадь кругового сектора в три раза меньше площади круга.

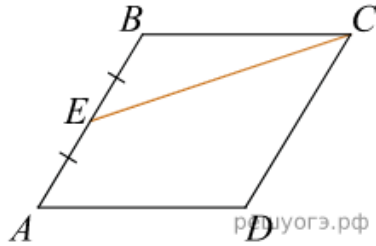


Длина окружности равна  $6\pi \cdot 3 = 18\pi$ . Отсюда радиус равен  $18\pi : 2\pi = 9$   
Тогда площадь круга равна  $81\pi$ .  
Тогда площадь кругового сектора равна  $81\pi : 3 = 27\pi$ .

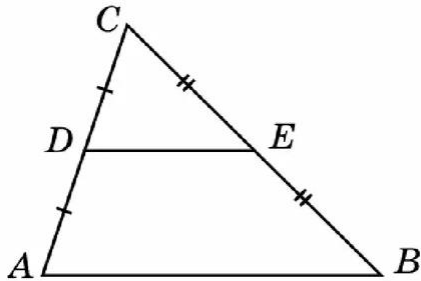
**Ответ: 27**



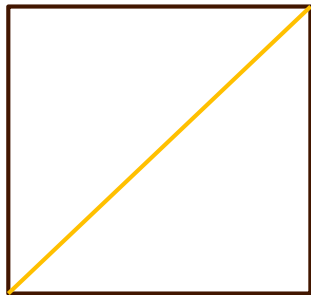
# Полезные факты



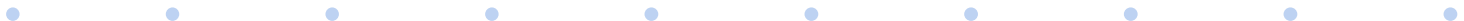
Площадь треугольника BCE в 4 раза меньше площади параллелограмма ABCD



Площадь треугольника DCE в 4 раза меньше площади треугольника ABC



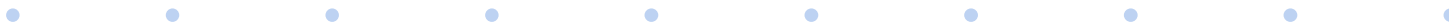
Диагональ квадрата в  $\sqrt{2}$  раз больше его стороны



# Задание № 18 (ОГЭ – 2023)

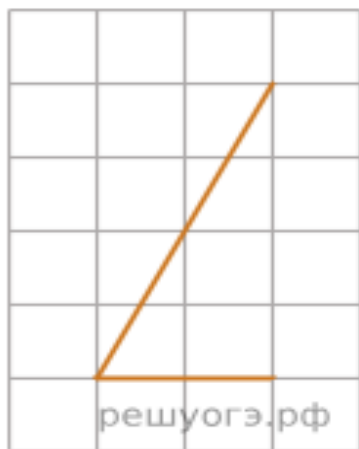
## Фигуры на квадратной решётке

- Углы
- Расстояние от точки до прямой
- Треугольники общего вида
- Прямоугольный треугольник
- Параллелограмм
- Ромб
- Трапеция
- Многоугольники

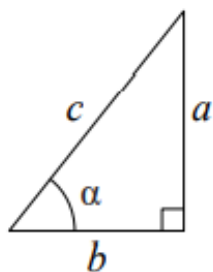


# Демонстрация задания 18 ( проект ОГЭ-2024)

Найдите тангенс острого угла, изображенного на рисунке.



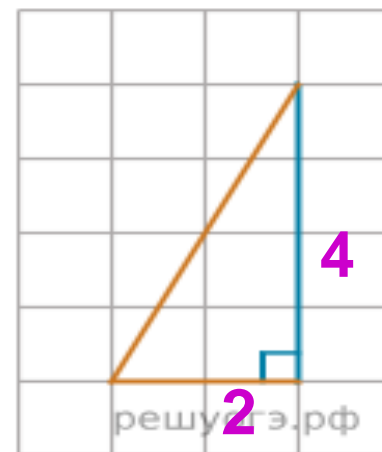
Прямоугольный треугольник



$$\sin \alpha = \frac{a}{c}$$

$$\cos \alpha = \frac{b}{c}$$

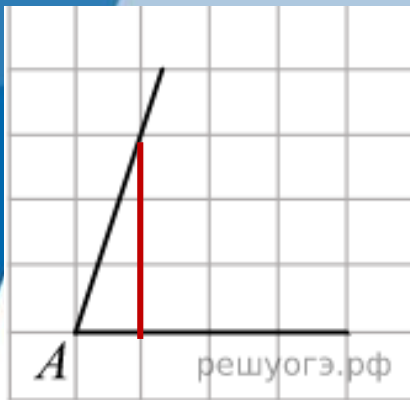
$$\text{tg } \alpha = \frac{a}{b}$$



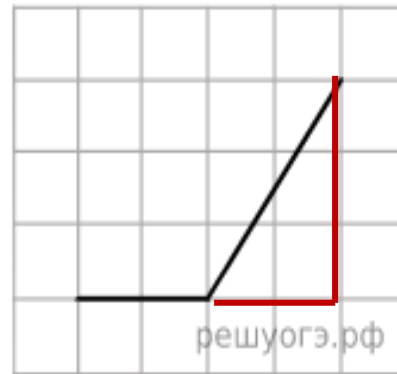
**Решение.** Проведем дополнительное построение (см. рис.). Тангенс угла в прямоугольном треугольнике равен отношению противолежащего катета к прилежащему, поэтому он равен  $4 : 2 = 2$ .

**Ответ: 2**

На квадратной сетке изображён угол А. Найдите тангенс А.

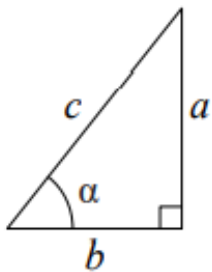


$$3 : 1 = 3$$



$$- 3 : 2 = - 1,5$$

Прямоугольный треугольник

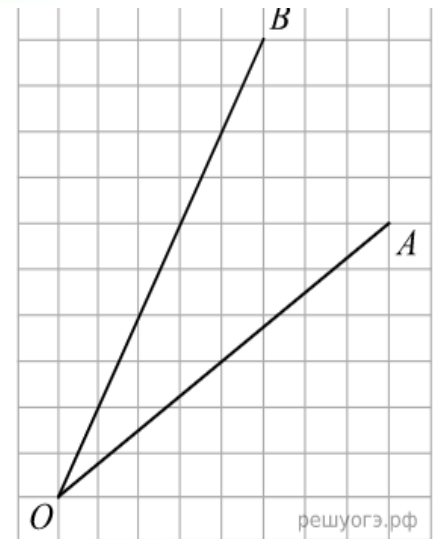


$$\sin \alpha = \frac{a}{c}$$

$$\cos \alpha = \frac{b}{c}$$

$$\text{tg } \alpha = \frac{a}{b}$$

Найдите тангенс угла  $AOB$ . Размер клетки  $1 \times 1$ .



**Решение.**

Найдем каждую из сторон треугольника  $AOB$ , чтобы показать, что он прямоугольный.

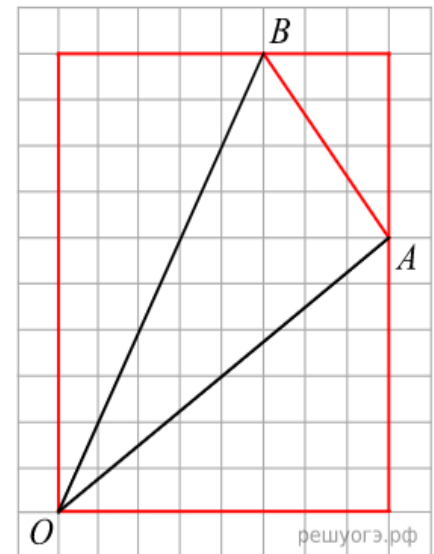
$$OB = \sqrt{5^2 + 10^2} = \sqrt{125},$$

$$AB = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25},$$

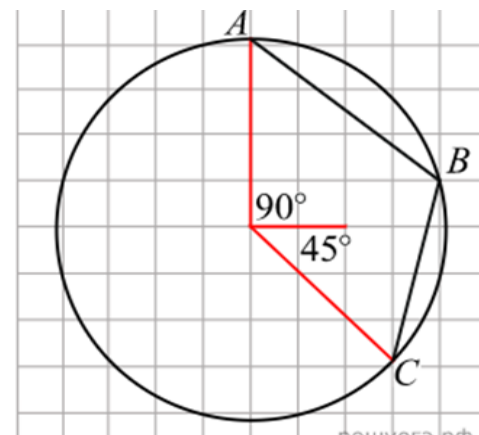
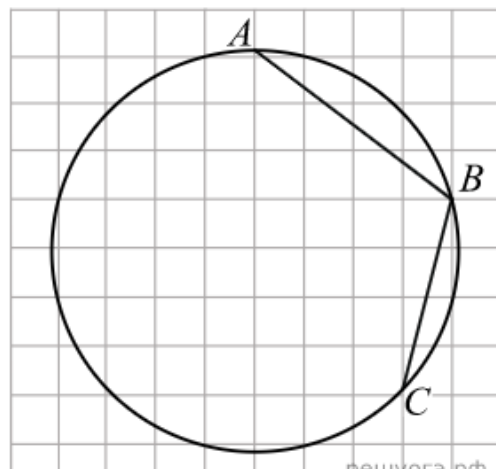
$$OA = \sqrt{6^2 + 8^2} = \sqrt{100}.$$

Таким образом,  $OB^2 = OA^2 + AB^2$ .

$$\operatorname{tg} AOB = \frac{AB}{AO} = \frac{\sqrt{25}}{\sqrt{100}} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2} = 0,5.$$



Найдите угол  $ABC$



**Решение.**

Проведем дополнительные построения. Угол  $AOC$  - центральный и равен  $135^\circ$ . Большая дуга  $AC$  равна  $360^\circ - 135^\circ = 225^\circ$ . Искомый угол опирается на большую дугу  $AC$ , он является вписанным, а, значит, равен половине дуги  $AC$ :  $225^\circ : 2 = 112,5^\circ$

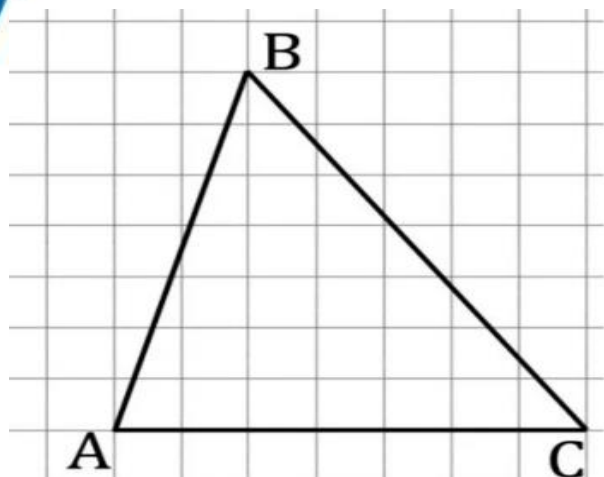
На клетчатой бумаге с размером клетки  $1 \times 1$  изображён треугольник  $ABC$  или изображена трапеция. Найдите длину его высоты, опущенной на сторону  $AC$ .

Или

Найдите среднюю линию треугольника (трапеции), параллельную  $AC$

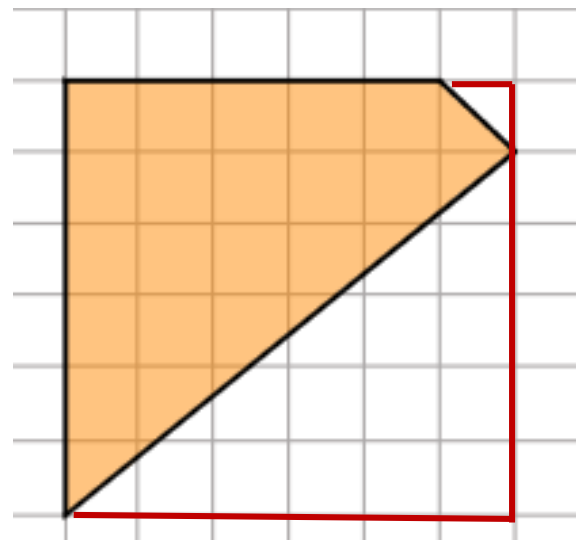
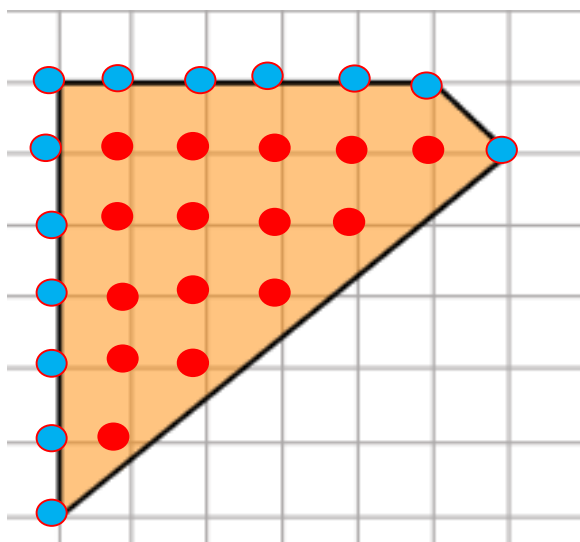
Или

Найдите площадь треугольника (трапеции)



Площадь одной клетки равна 1. Найдите площадь фигуры, изображённой на рисунке.

$$S_{\text{КВ}} = 6 \cdot 6 = 36$$
$$36 - 0,5 - 15 = 20,5$$



Найдём площадь данной фигуры по формуле Пика:

$$S = B + \Gamma/2 - 1,$$

где  $B$  — число узлов сетки внутри фигуры,  
 $\Gamma$  — число узлов сетки на границе фигуры,  
включая вершины. Получаем:

$$S = 15 + 13/2 - 1 = 20,5.$$



## Задание № 19 (ОГЭ – 2023)

# Анализ геометрических высказываний

Многие девятиклассники допускают ошибки именно в задании № 19  
“Анализ геометрических высказываний”

Объем утверждений достаточно большой, поэтому лучше распределить их по разделам:

Аксиомы

Углы

Треугольники

Четырехугольники

Окружности

Симметрия



Стоит серьёзно отнестись к утверждениям, которые с первого раза очевидными не кажутся. Их необходимо осмыслить, понять. Надо начертить картинку к такому утверждению и подумать, почему оно верно (или неверно).

Зубрёжка – бесполезное занятие. Любое утверждение можно сформулировать по-разному, поэтому самое главное – это понимание.

### ***Некоторые примеры неверных высказываний***

**Любые три прямые имеют не менее одной общей точки.**

(Эти три прямые могут быть параллельны друг другу и не иметь общих точек вообще).

**Существует квадрат, который не является прямоугольником.**

(Любой квадрат является частным случаем прямоугольника, потому что прямоугольник – это четырехугольник, у которого все углы по  $90^\circ$ ).

**Любые два прямоугольных треугольника подобны.**

(У подобных треугольников должны быть равны углы. Если взять два произвольных прямоугольных треугольника, то не обязательно два острых угла одного треугольника будут соответственно равны двум острым углам другого).

- Стороны треугольника пропорциональны косинусам противолежащих углов.

(Теорема синусов: Стороны треугольника пропорциональны синусам противолежащих углов.)

- Квадрат любой стороны треугольника равен сумме квадратов двух других сторон без удвоенного произведения этих сторон на синус угла между ними.

(Если бы в формулировке вместо синуса стоял косинус, было бы верным данное утверждение).

- Площадь трапеции равна произведению суммы оснований на высоту.

(Площадь трапеции равна произведению полусуммы оснований на высоту).

- Каждая из биссектрис равнобедренного треугольника является его медианой.

(Только биссектриса, проведенная к основанию. Биссектриса, проведенная к боковой стороне не будет являться медианой).

- Точка пересечения двух окружностей равноудалена от центров этих окружностей.

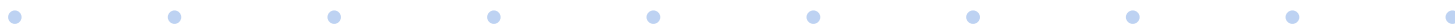
(Равноудалена – находится на одном и расстоянии от обоих центров. Если окружности будут разного радиуса, то точка пересечения окружностей будет ближе к центру окружности меньшего радиуса).

# **Геометрические задачи с развернутым ответом– ОГЭ-2024**

## Задания второй части ОГЭ

направлены на проверку владения материалом на повышенном уровне.

Их назначение – дифференцировать хорошо успевающих школьников по уровням подготовки, выявить наиболее подготовленную часть выпускников, составляющую потенциальный контингент профильных классов.

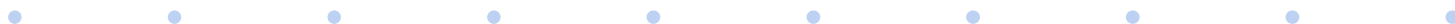


Геометрические задания нередко вызывают затруднения экзаменуемых.

Здесь требуется

- ✓ аккуратный чертёж,
- ✓ обоснование полученного факта,
- ✓ вычисления.

Задания части 2 относятся к заданиям повышенного и высокого уровня сложности, поэтому ожидать на этом месте задачу, в которой используется только один геометрический факт, не стоит. Это задания, при выполнении которых нужно будет решить несколько геометрических задач.



# Геометрические задачи второй части

## Задача 23

(на вычисление)

направлена на проверку умения решить несложную геометрическую задачу на вычисление.

## Задача 24

(на доказательство)

связана со свойствами треугольников, четырехугольников, окружностей

## Задача 25

требует свободного владения материалом и довольно высокого уровня математического развития. Рассчитана на обучающихся, изучавших математику более основательно

# Методы решения геометрических задач

**геометрический** – когда требуемое утверждение выводится с помощью логических рассуждений из ряда известных теорем;

**алгебраический** – когда искомая геометрическая величина вычисляется на основании различных зависимостей между элементами геометрических фигур непосредственно или с помощью уравнений;

**комбинированный** – когда на одних этапах решение ведется геометрическим методом, а на других – алгебраическим.





# Некоторые методы решения геометрических задач

- **Применение ключевых задач**
- **Метод вспомогательных построений**
- **Переход к равновеликим фигурам**
- **Метод площадей**

# Задание 23

## Проверяемые умения

Уметь выполнять действия с геометрическими фигурами. Проводить доказательные рассуждения при решении задач.

## Типичные ошибки:

- неверное построения чертежа к задаче;
- решают частную задачу, изменяя фактически ее смысл;
- неправильно указан признак подобия треугольников;
- неверно найдены сходственные стороны;
- неверно решена пропорция;
- вычислительные ошибки.

# Задача 23 на вычисление

- Углы
- Треугольники
- Четырехугольники
- Окружности

# Критерии оценивания выполнения задания 23

Баллы	Содержание критерия
2	Ход решения верный, все его шаги выполнены правильно, получен верный ответ
1	Ход решения верный, все его шаги выполнены правильно, но даны неполные объяснения или допущена одна вычислительная ошибка
0	Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше
2	<i>Максимальный балл</i>



*Биссектрисы углов  $A$  и  $B$  при боковой стороне  $AB$  трапеции  $ABCD$  пересекаются в точке  $F$ . Найдите  $AB$ , если  $AF = 21$ ,  $BF = 20$ .*

Основные ошибки, допущенные при решении обучающимися.

1. Неправильно формулируют утверждение о биссектрисах углов трапеции при боковой стороне, не доказывают данный факт.
2. Дают неправильное название углов, например, односторонние называют соответственными.
3. При записи равенства треугольников, не учитывают соответствие сторон и углов.
4. Не пишут параллельные прямые и секущую.

### Задача (демоверсия ОГЭ-2024)

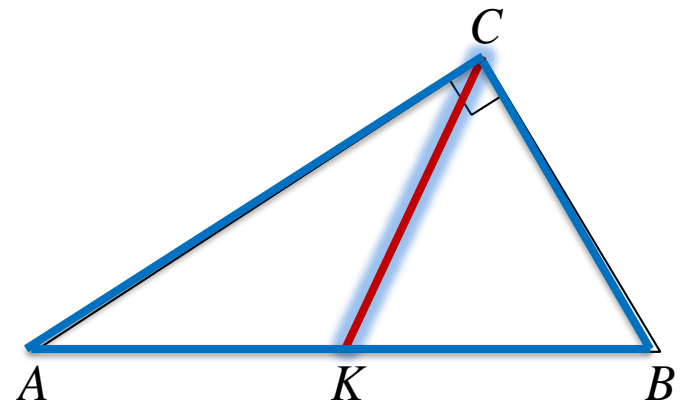
В прямоугольном треугольнике  $ABC$  с прямым углом  $C$  известны катеты:  $AC = 6$ ,  $BC = 8$ . Найдите медиану  $CK$  этого треугольника.

**Решение.** По свойству медианы прямоугольного треугольника, проведенной из вершины прямого угла.  $CK = \frac{1}{2} AB$

Так как по теореме Пифагора

$$AB = \sqrt{AC^2 + BC^2}$$

То 
$$CK = \frac{1}{2} AB = \frac{1}{2} \sqrt{AC^2 + BC^2} =$$
$$= \frac{1}{2} \sqrt{36 + 64} = 5.$$



Ответ: 5.

# Задание 24

## Проверяемые умения

Проводить доказательные рассуждения при решении задач.

## Типичные ошибки:

- неверное построения чертежа к задаче
- неполное доказательство;
- путают свойства и признаки геометрической фигуры;
- интуитивно понятные факты не доказывают, считая их очевидными, а также не умеют математически грамотно и ясно записывать решение, приводя при этом необходимые пояснения и обоснования.

## Критерии оценивания выполнения задания 24

Баллы	Содержание критерия
2	Доказательство верное, все шаги обоснованы
1	Доказательство в целом верное, но содержит неточности
0	Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше
2	<i>Максимальный балл</i>



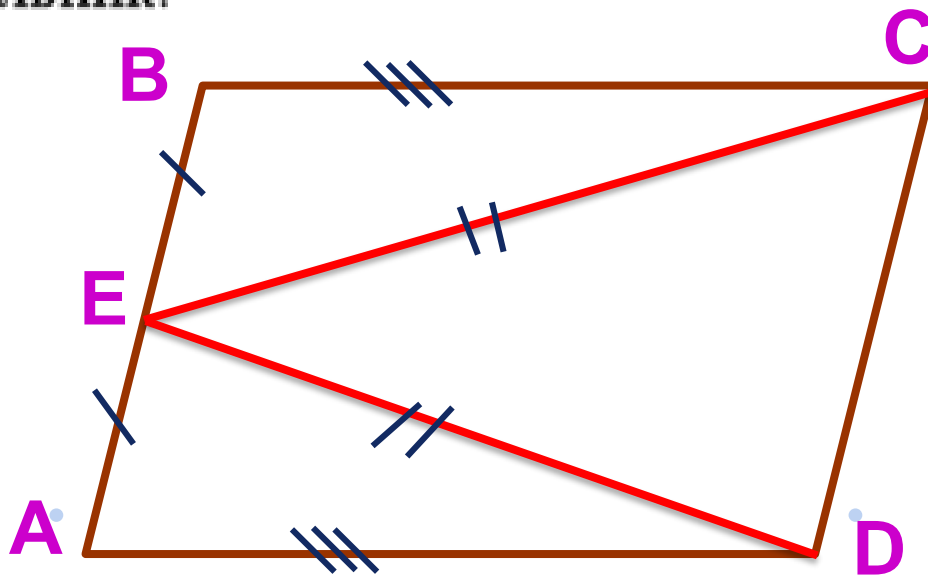
## Задача (демоверсия ОГЭ-2024)

24 В параллелограмме  $ABCD$  точка  $E$  — середина стороны  $AB$ . Известно, что  $EC = ED$ . Докажите, что данный параллелограмм — прямоугольник.

Доказательство.

Треугольники  $BEC$  и  $AED$  равны по трём сторонам.

Значит, углы  $CBE$  и  $DAE$  равны. Так как их сумма равна  $180^\circ$ , то углы равны  $90^\circ$ . Такой параллелограмм — прямоугольник.



# Задание 25

## **Проверяемые умения**

Уметь выполнять действия с геометрическими фигурами. Решать планиметрические задачи на нахождение геометрических величин. Различать взаимное расположение геометрических фигур на плоскости, изображать геометрические фигуры; выполнять чертежи по условию задачи. Проводить доказательные рассуждения при решении задач.

## **Типичные ошибки:**

- доказательство верное, но записи небрежные
- присутствуют только отдельные факты, не связанные с тем, что необходимо доказать;
- неправильно понимают условие задания;
- используют неверные методы решения.

# Критерии оценивания выполнения задания 25

Баллы	Содержание критерия
2	Ход решения верный, получен верный ответ
1	Ход решения верный, все его шаги присутствуют, но допущена описка или ошибка вычислительного характера
0	Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше
2	<i>Максимальный балл</i>

### Задание № 26 (демоверсия ОГЭ – 2024)

Основание  $AC$  равнобедренного треугольника  $ABC$  равно 12. Окружность радиусом 8 с центром вне этого треугольника касается продолжений боковых сторон треугольника и касается основания  $AC$ . Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник  $ABC$ .

Решение.

Пусть  $O$  — центр данной окружности, а  $Q$  — центр окружности, вписанной в треугольник  $ABC$ .

Точка касания  $M$  окружностей делит  $AC$  пополам.

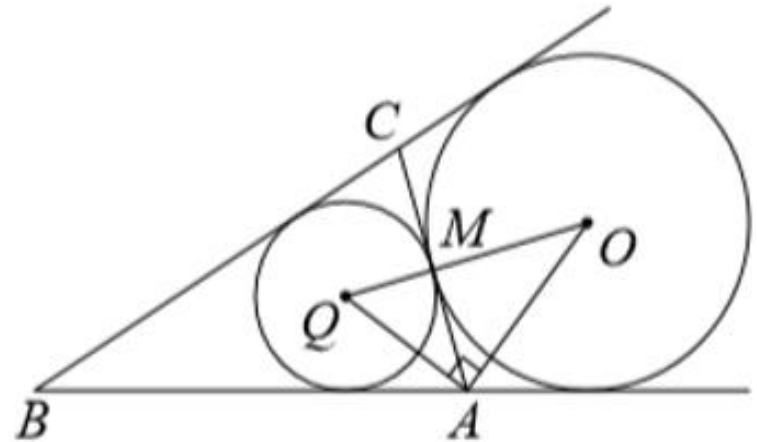
Лучи  $AQ$  и  $AO$  — биссектрисы смежных углов, значит, угол  $OAQ$  прямой.

Из прямоугольного треугольника  $OAQ$  получаем:  $AM^2 = MQ \cdot MO$ .

Следовательно,

$$QM = \frac{AM^2}{OM} = \frac{9}{2} = 4,5.$$

Ответ: 4,5.



Геометрия полна приключений,  
потому что за каждой задачей  
скрывается приключение мысли.  
Решить задачу – это значит пережить  
приключение.

*Вячеслав Викторович Произолов.*

