Математика (профильный уровень) задание 10

ЕГЭ-2023

Попова Елена Юрьевна,
учитель математики
МАОУ СОШ № 5
города Тюмени

Задание №10

Тип задания по кодификатору требований

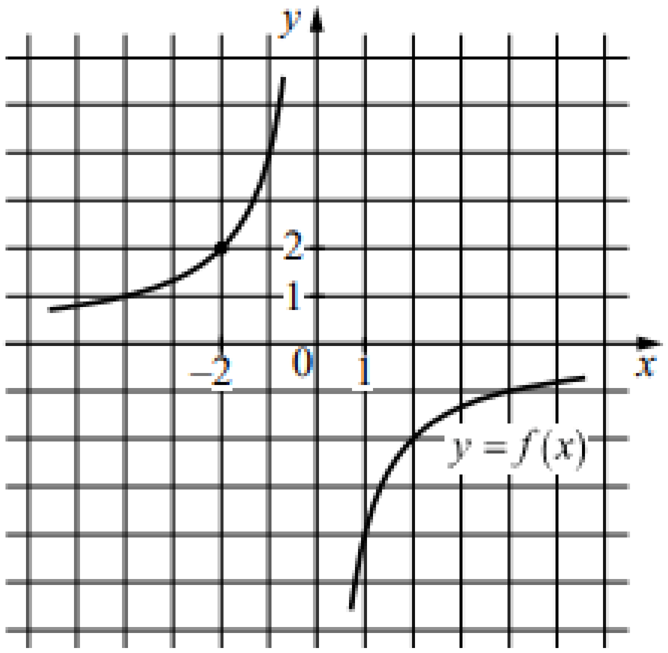
Функции и их графики.

Из ***кодификатора*** 2023 года для выполнения 10 задания нужно изучить основные элементарные функции, их свойства и графики

Проверяется
умение определять значение функции по значению аргумента при различных способах задания функции; описывать по графику поведение и свойства функции, находить по графику функции наибольшее и наименьшее значения; строить графики изученных функций.

Вариант задания 9 (ЕГЭ-2022)

9 На рисунке изображён график функции вида $f(x) = \frac{k}{x}$. Найдите значение $f(10)$.



Комментарий

Задание выполнило более двух третей участников экзамена, что является очень хорошим результатом. Сложности вызывают функции с отрицательными коэффициентами. Проблема уходит корнями в 6 класс: не выработаны навыки работы с отрицательными числами. В примере самый популярный неверный ответ $0{,}4$ (4 %). Заметим, что ответ на эту задачу отсутствует в 11 % работ.

Функции

- ***Линейная функция, её график***
- ***Квадратичная функция, её график***
- ***Степенная функция, её график***
- ***Тригонометрические функции, их графики***
- ***Показательная функция, её график***
- ***Логарифмическая функция, её график***

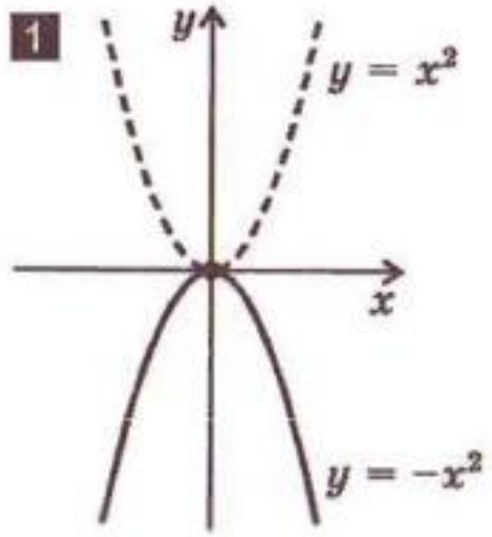
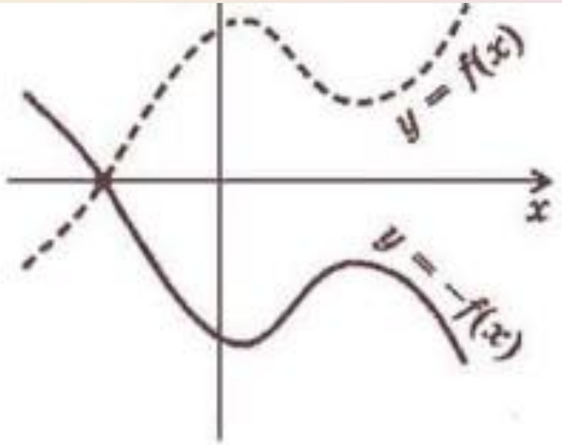
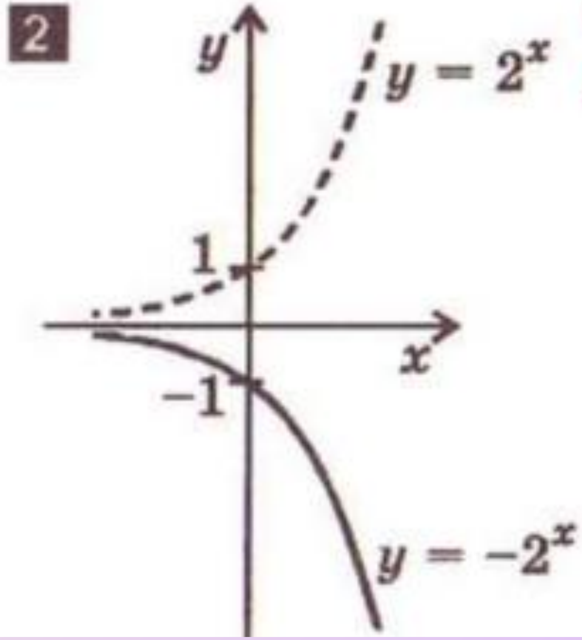


График функции y=-f(x) получается преобразованием симметрии графика функции y=f(x) относительно оси x.

Замечание. *Точки пересечения графика с осью x остаются неизменными.*





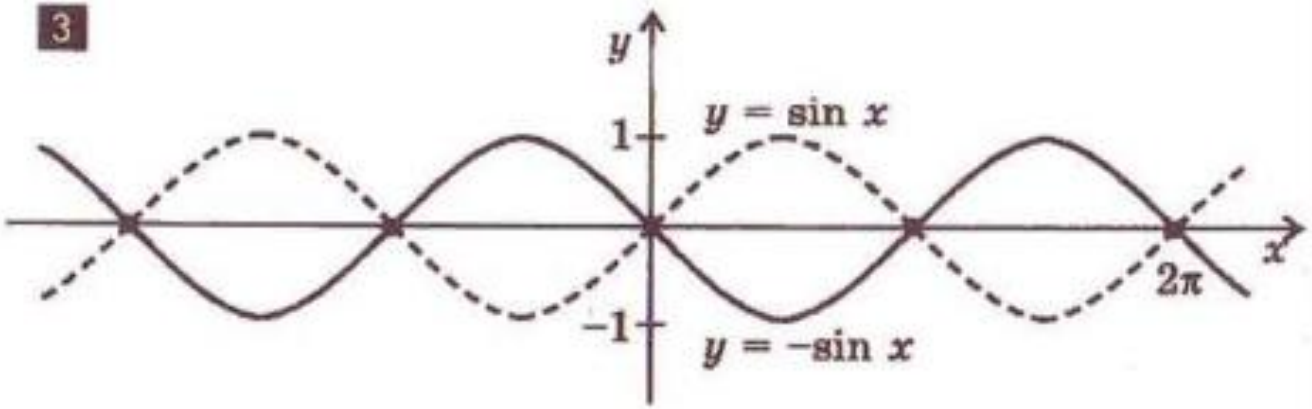
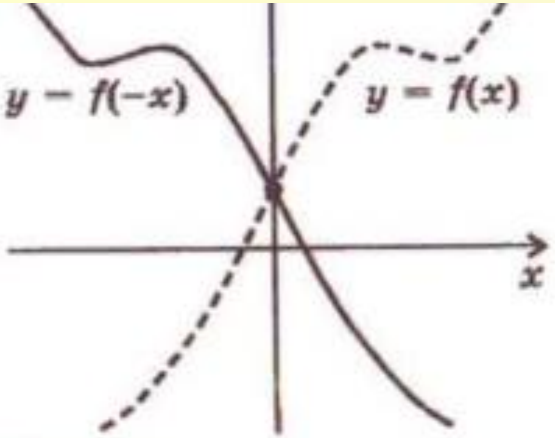


График функции y=f(-x) получается преобразованием симметрии графика функции y=f(x) относительно оси у.



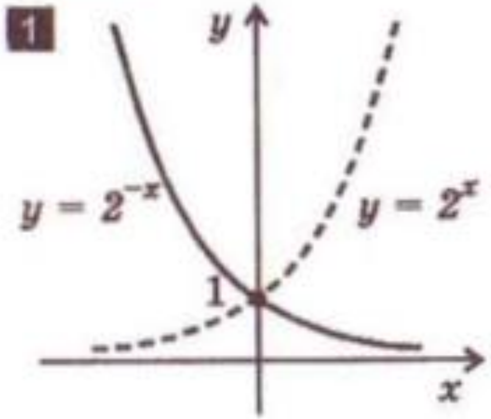
Замечание. Точка пересечения графика с осью у остается неизменной.

Замечание 1. График четной функции не изменяется при отражении относительно оси у, поскольку для четной функции f(-x)=f(x). ***Пример:*** $(-x)^2=x^2$

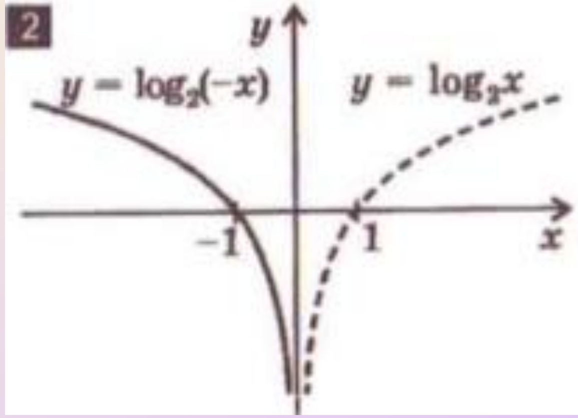
Замечание 2. График нечетной функции изменяется одинаково как при отражении относительно оси х, так и при отражении относительно оси у, посольку для нечетной функции f(-x)=-f(x). ***Пример:*** sin(-x)=-sinx.

Примеры:

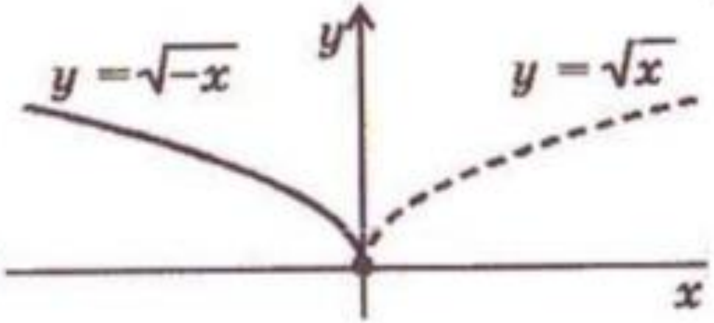
1



2



3



4

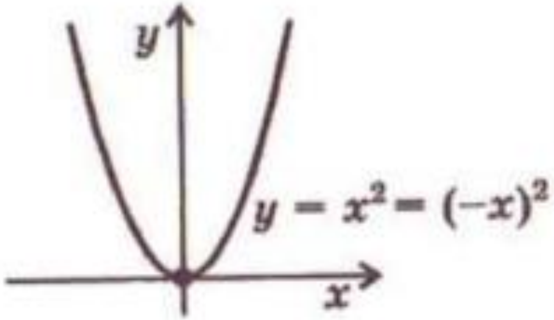
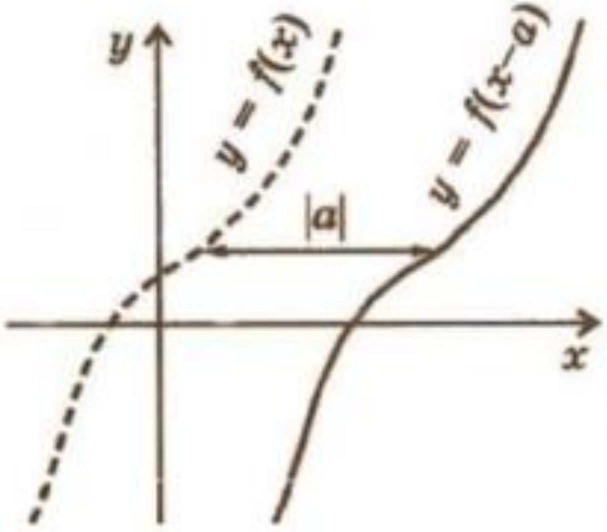
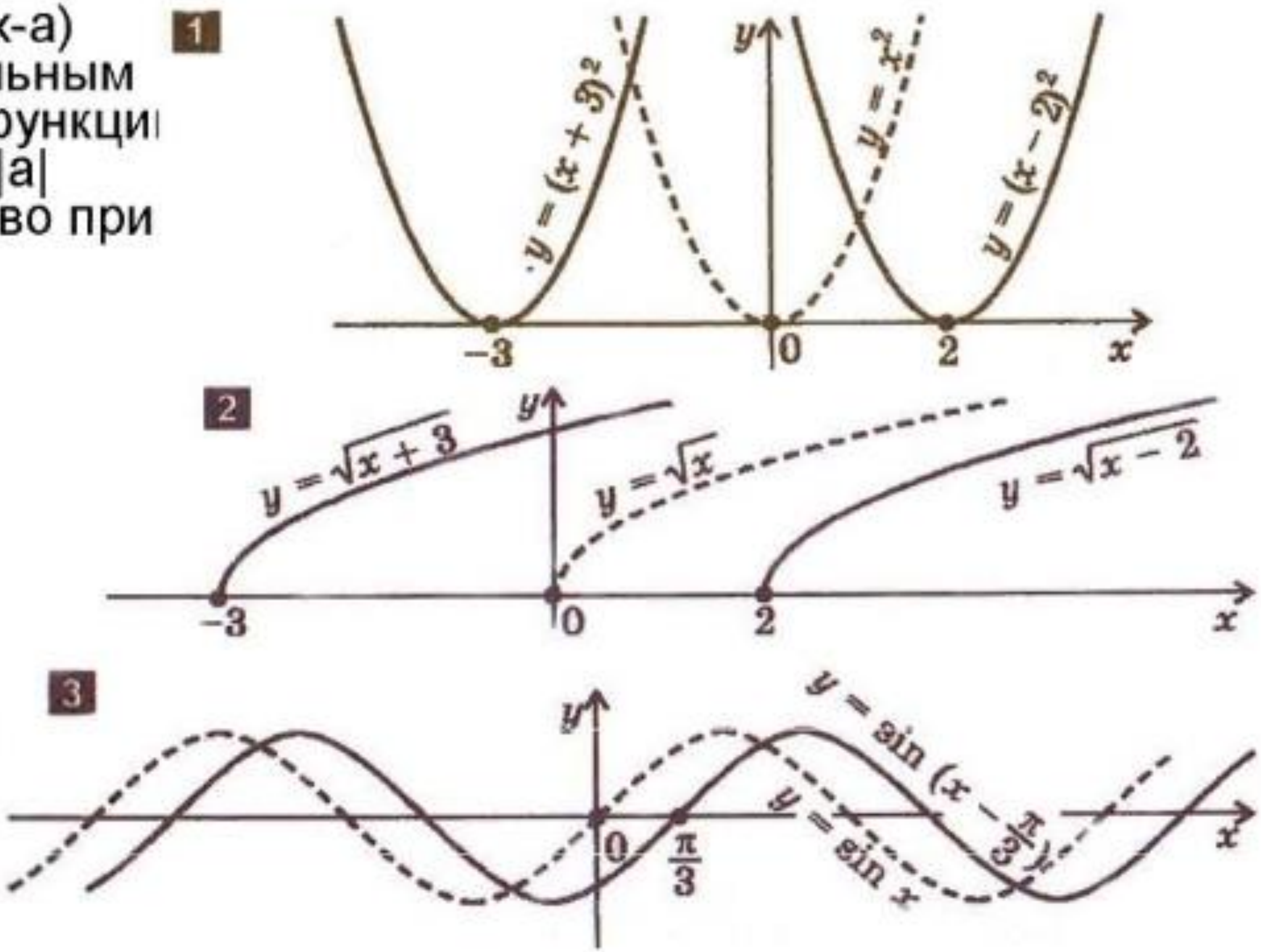


График функции y=f(x-a) получается параллельным переносом графика функци y=f(x) вдоль оси x на |a| вправо при a>0 и влево при a<0.



Примеры:



Замечание. График периодической функции с периодом T не изменяется при параллельных переносах вдоль оси x на nT, n∈Z.

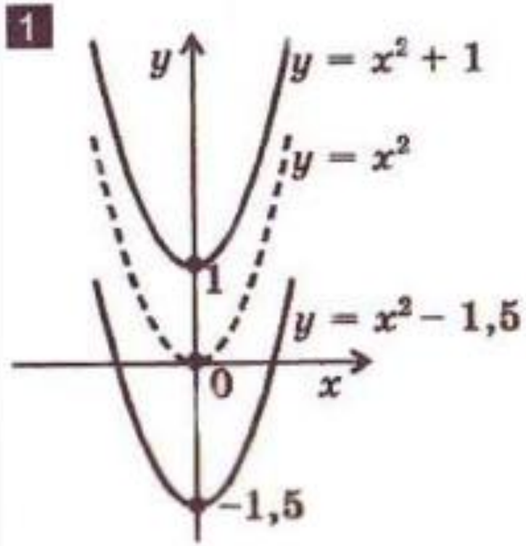
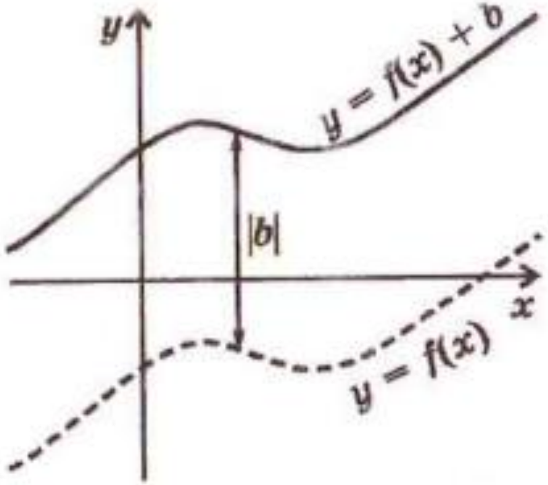
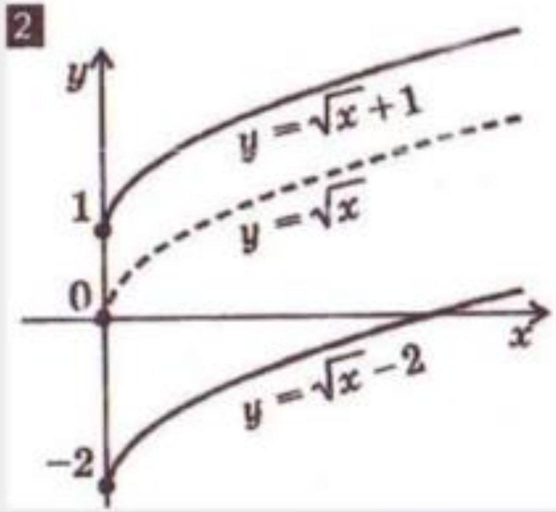
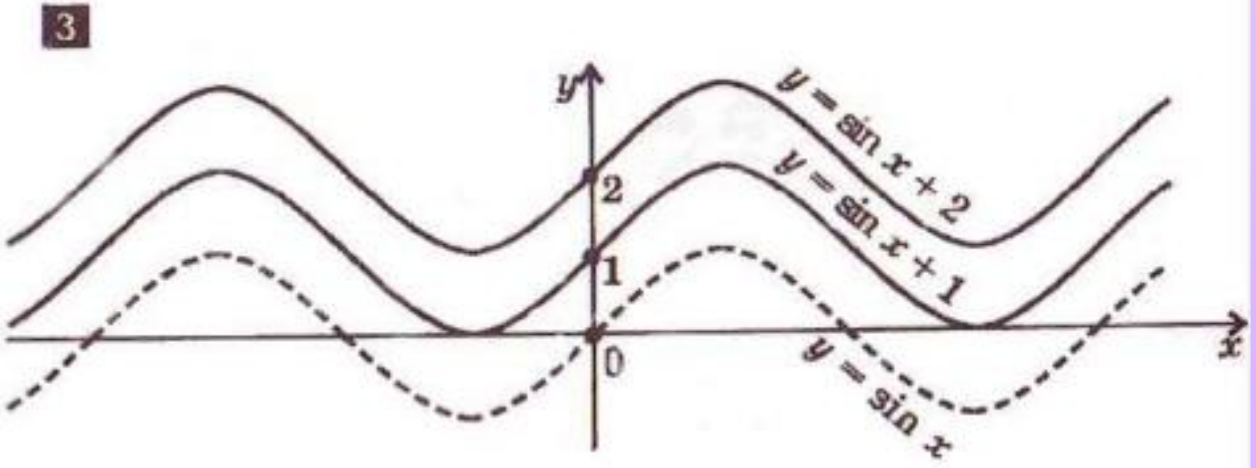


График функции y=f(x)+b получается параллельным переносом графика функции y=f(x) вдоль оси y на |b| вверх при b>0 и вниз при b<0.



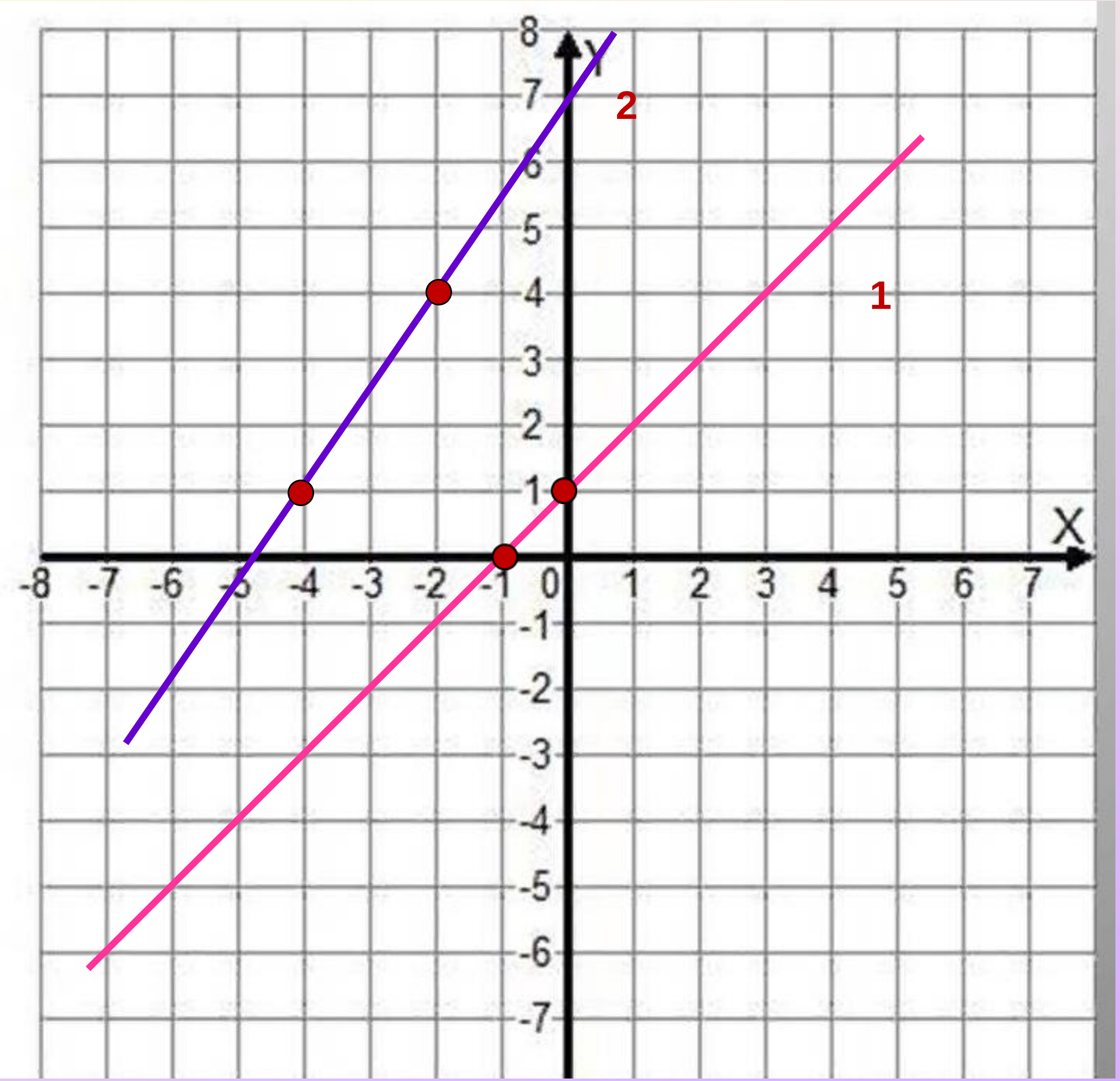




Линейная функция, её график

Найдите ординату точки пересечения графиков линейных функций

$$y = kx + b$$



Найдите ординату точки пересечения графиков линейных функций

Вторая прямая проходит через точки (−1; 0) и (0; 1), следовательно

$$\begin{cases} 0 = -k + b, \\ 1 = b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = 1, \\ b = 1. \end{cases}$$

Значит, уравнение второй прямой — $y = x + 1$.
Первая прямая проходит через точки (−4; 1) и (−2; 4), следовательно,

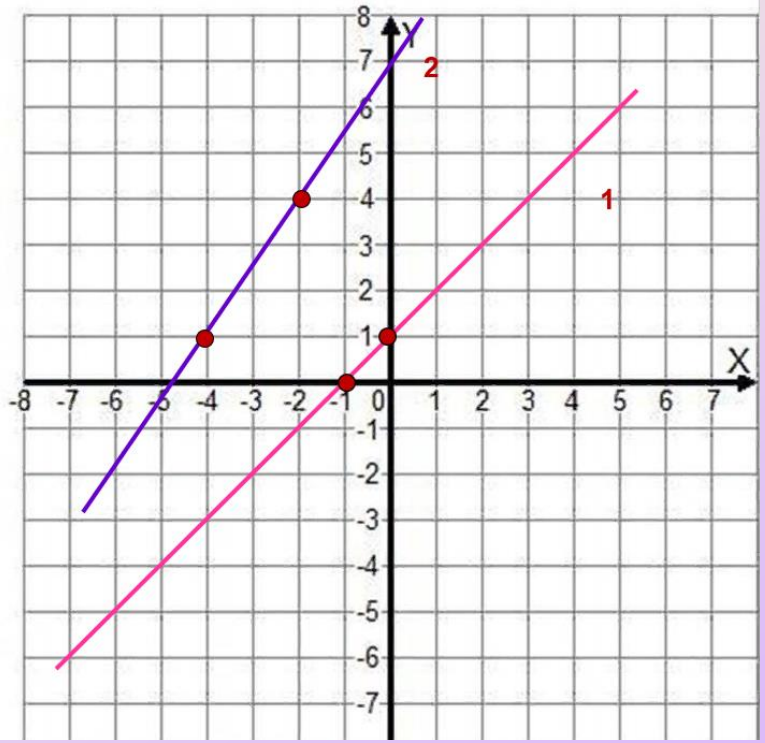
$$\begin{cases} 1 = -4k + b, \\ 4 = -2k + b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 = 2k, \\ 4 = -3 + b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = \frac{3}{2}, \\ b = 7. \end{cases}$$

Значит, уравнение первой прямой — $y = \frac{3}{2}x + 7.$

Теперь найдём абсциссу точки пересечения графиков:

$$x + 1 = \frac{3}{2}x + 7 \Leftrightarrow \frac{x}{2} = -6 \Leftrightarrow x = -12.$$

Теперь найдем ординату этой точки -12 + 1 = - 11



B10	-	1	1			

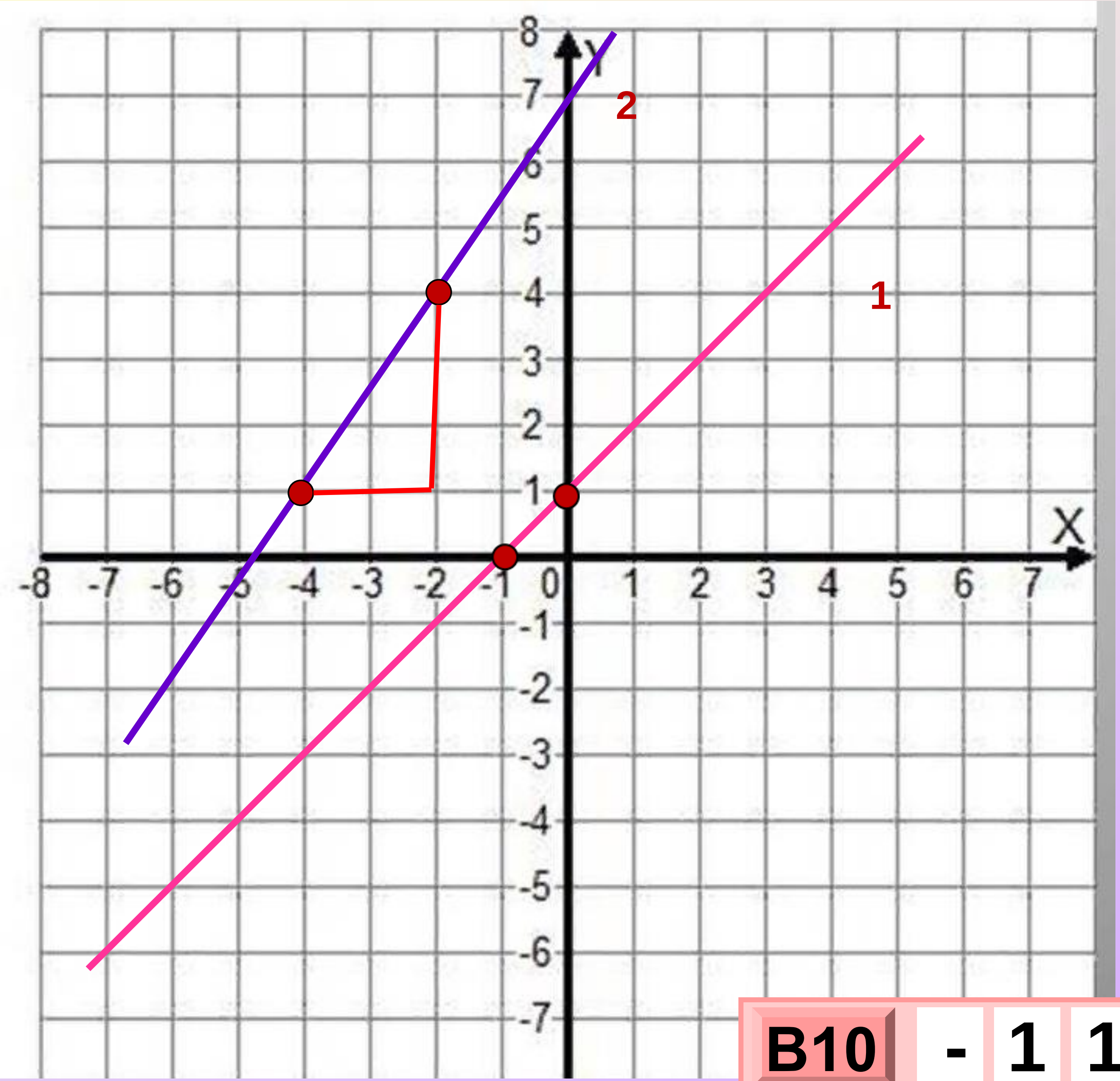
Найдите ординату точки пересечения графиков

$$y = kx + b$$

Прямая (1)
y= x + 1

Прямая (2)
К= 3 : 2 = 1,5
В = 7
y = 1,5x + 7

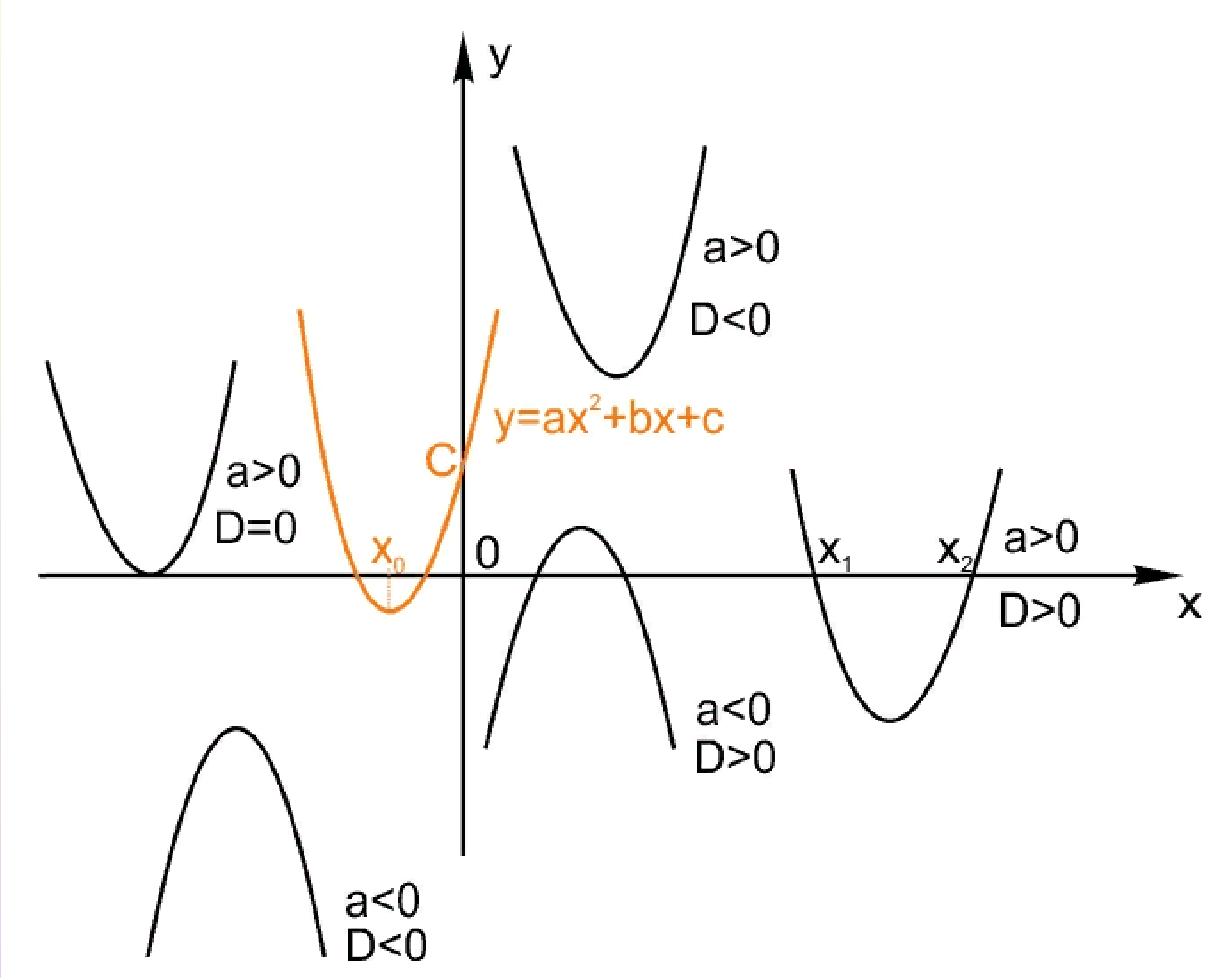
x + 1 = 1,5x + 7
0,5x = - 6
x = - 12
Ордината – 12 + 1 = - 11



B10 | - | 1 | 1

Квадратичная функция, её график

Расположение графика квадратичной функции в зависимости от значений коэффициента а и дискриминанта D



Найти значение функции f(- 12), если $f(x)=ax^2 + bx + c$.

1 способ

A(-4;-3), B(-3;-2), C(-2;1)

$$\begin{cases} 16a - 4в + c = -3 \quad (*) \\ 9a - 3в + c = -2 \quad (**) \\ 4a - 2в + c = 1 \quad (***) \end{cases}$$

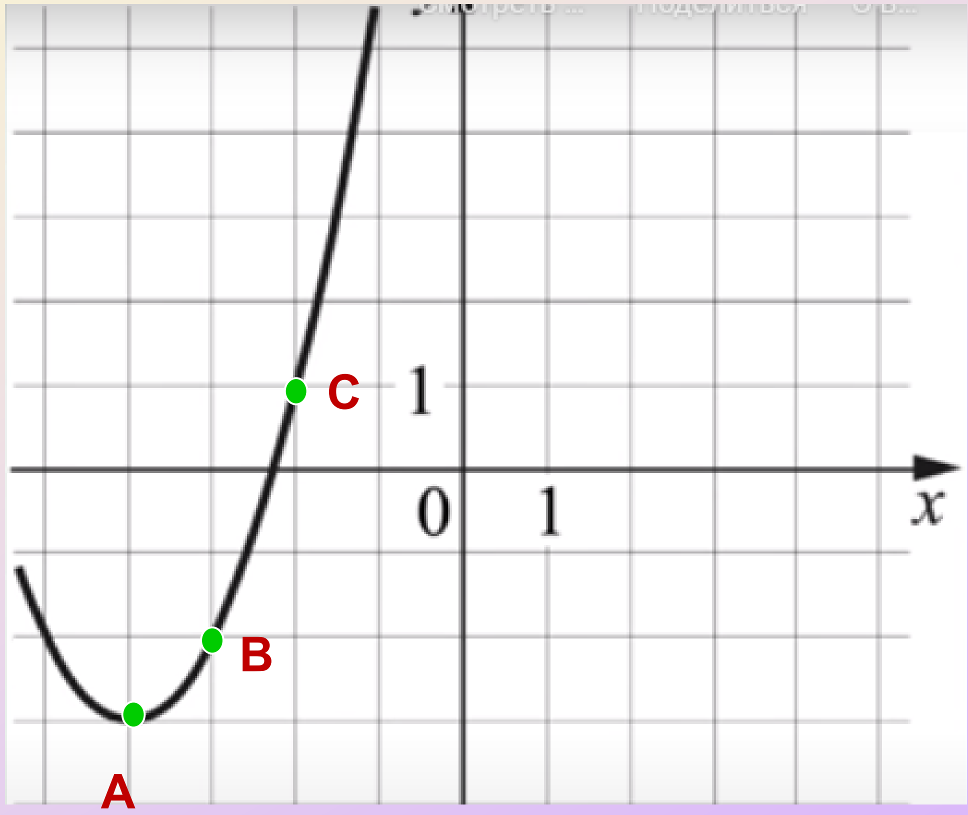
Вычтем из уравнения (*) уравнение (***) и вычтем из уравнения (**) уравнение (***), получим

$$\begin{cases} 12a - 2в = -4 \\ 5a - в = -3 \end{cases} \qquad \begin{cases} 6a - в = -2 \\ 5a - в = -3 \end{cases}$$

a = 1   в = 8   c = 13

Имеем $f(x)=x^2 + 8x + 13$, т.е. по условию

f(- 12) = 144 – 96 + 13 = 61



B10 | 6 | 1

Найти значение функции f(- 12), если f(x)=ax^2 + bx + c.

Рассмотрим поведение параболы вблизи ее вершины

Коэффициент а =1, тогда достаточно двух уравнений

A(-4;-3), B(-3;-2),

$$\begin{cases} 16 - 4в + c = -3 \\ 9 - 3в + c = -2 \end{cases} \quad \begin{cases} -4в + c = -19 \\ -3в + c = -11 \end{cases}$$

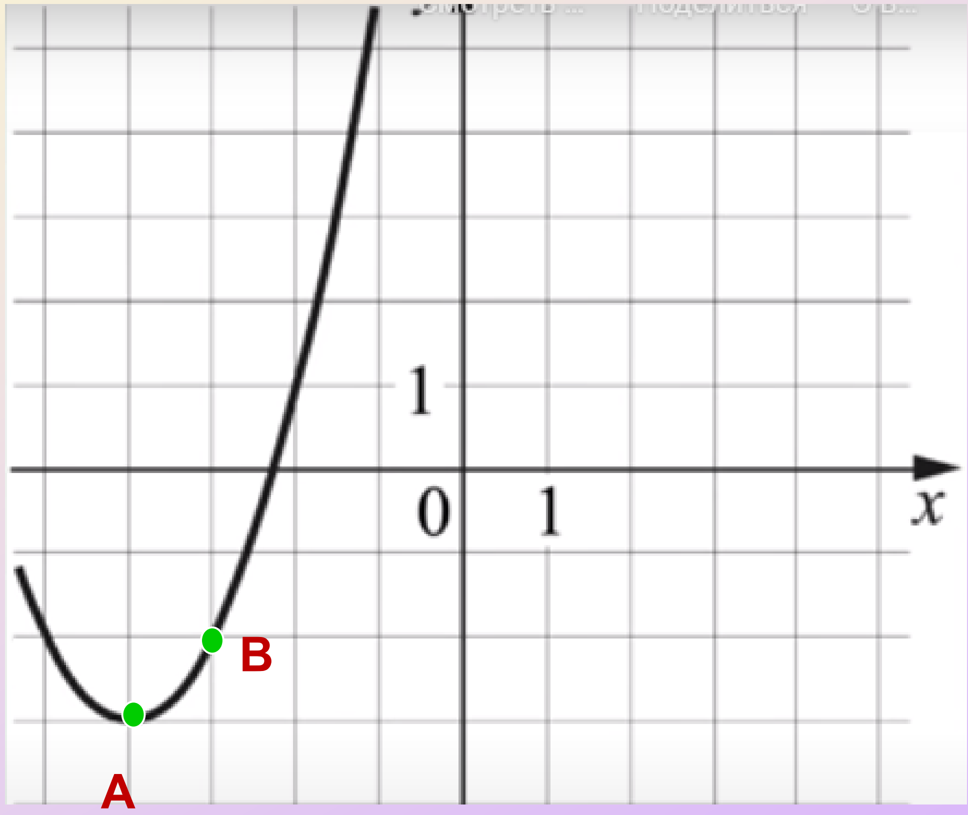
$$-в = -8$$

$$в = 8$$

c = 13

Имеем f(x)=x^2 + 8x + 13, т.е. по условию

f(- 12) = 144 – 96 + 13 = 61



B10	6	1				

Найти значение функции f(- 12), если

$f(x)=ax^2 + bx + c$.

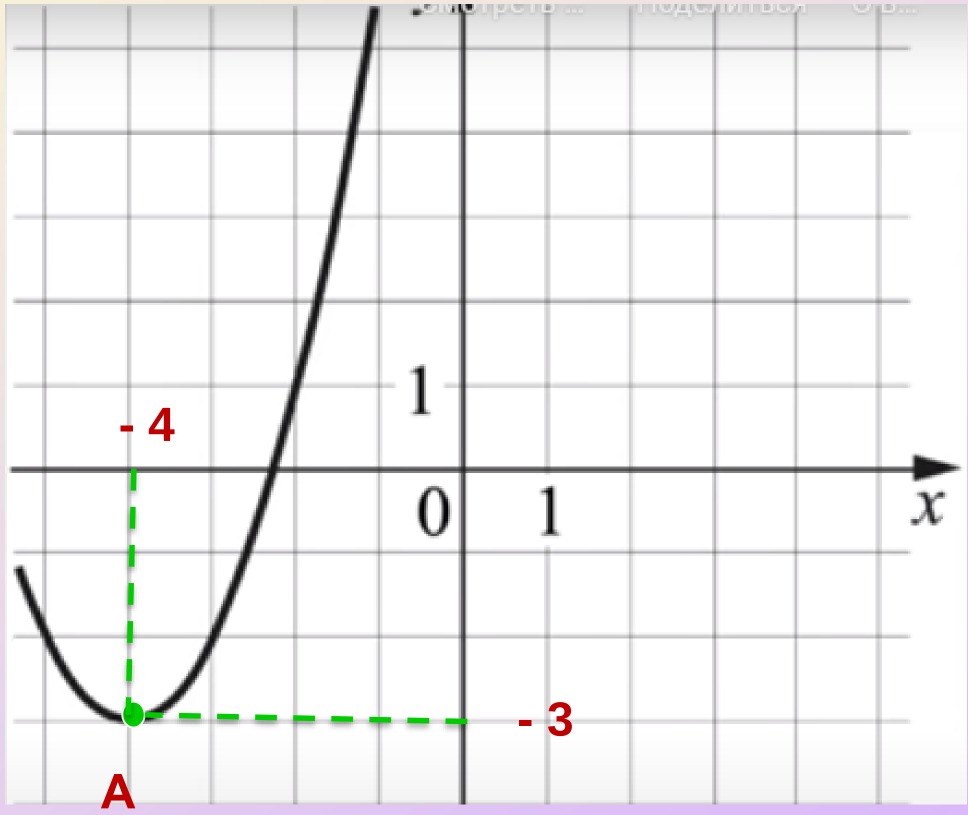
2 вариант

Коэффициент а = 1, $X_в = -\frac{в}{2a} = -4$, в = 8, тогда достаточно одного уравнения для А(- 4; - 3)

16а – 4в + с =-3; 16 – 32 + с = - 3; с = 13

Имеем $f(x)=x^2 + 8x + 13$, т.е. по условию

f(- 12) = 144 – 96 + 13 = 61



B10	6	1				

Найти значение функции f(- 12), если

$f(x)=ax^2 + bx + c$.

3 вариант

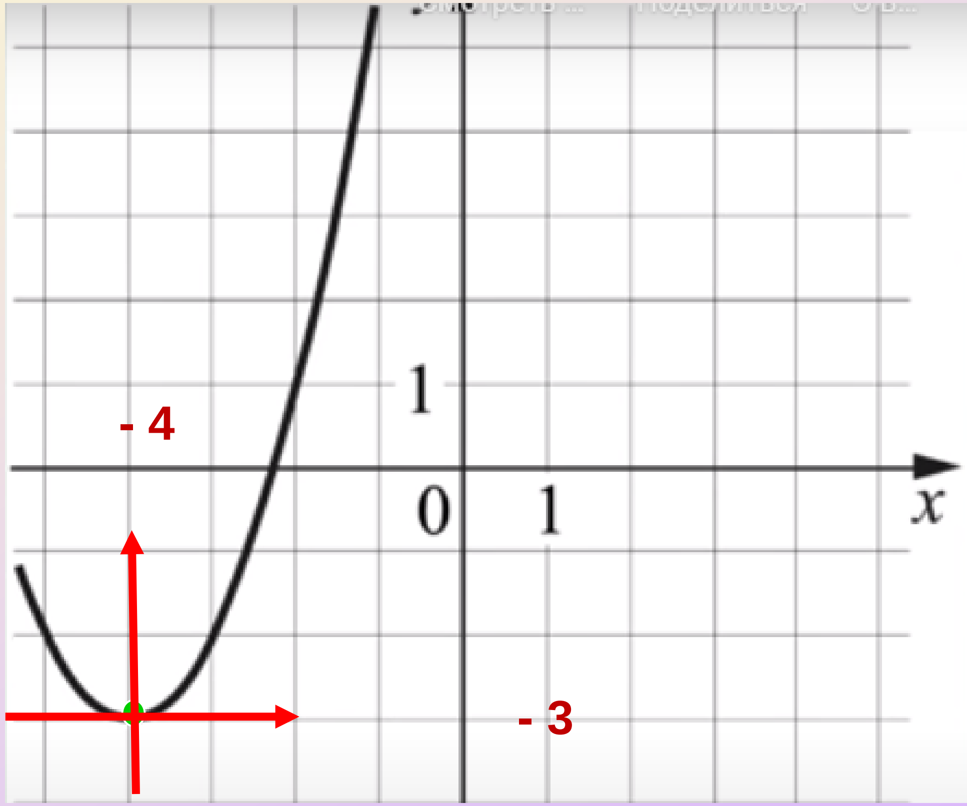
a=1,

координаты вершины параболы A(- 4; - 3).

$f(x)= (x+4)^2 – 3$

по условию

$f(- 12) = (-12 + 4)^2 – 3 = 64 – 3 = 61$



B10 6 1

Найти значение функции f(- 12), если

$f(x)=ax^2 + bx + c$.

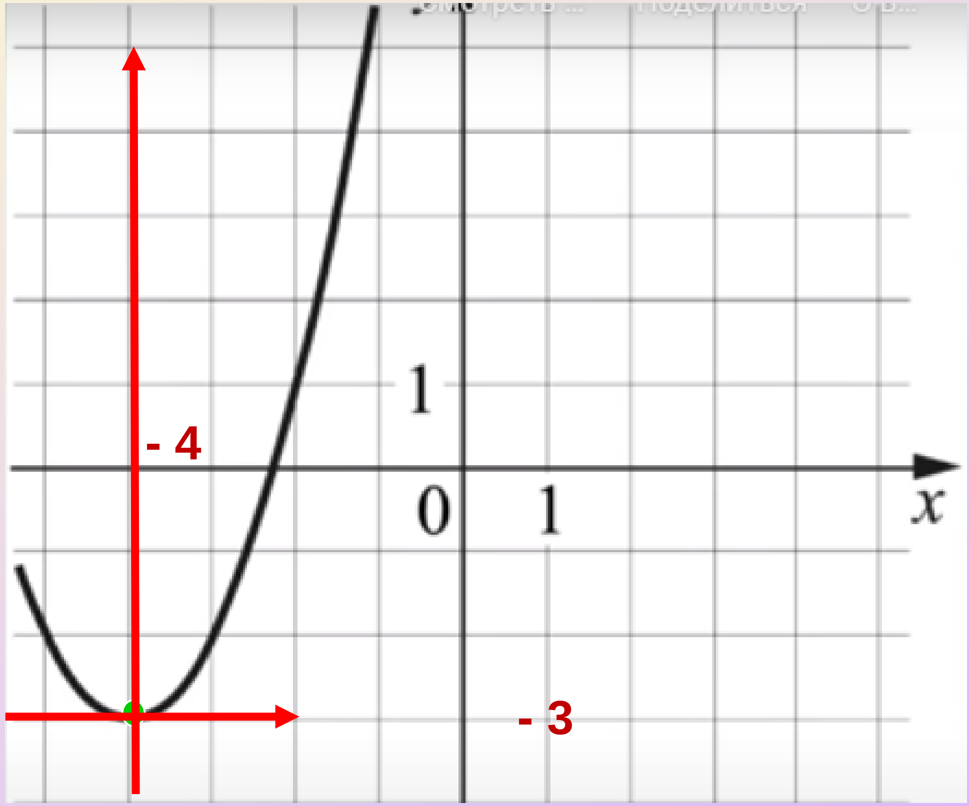
4 вариант (без формул)

Относительно новой системы координат функция примет вид $f(x) = x^2$

Но тогда в новой системе координат нам необходимо найти f(- 8).

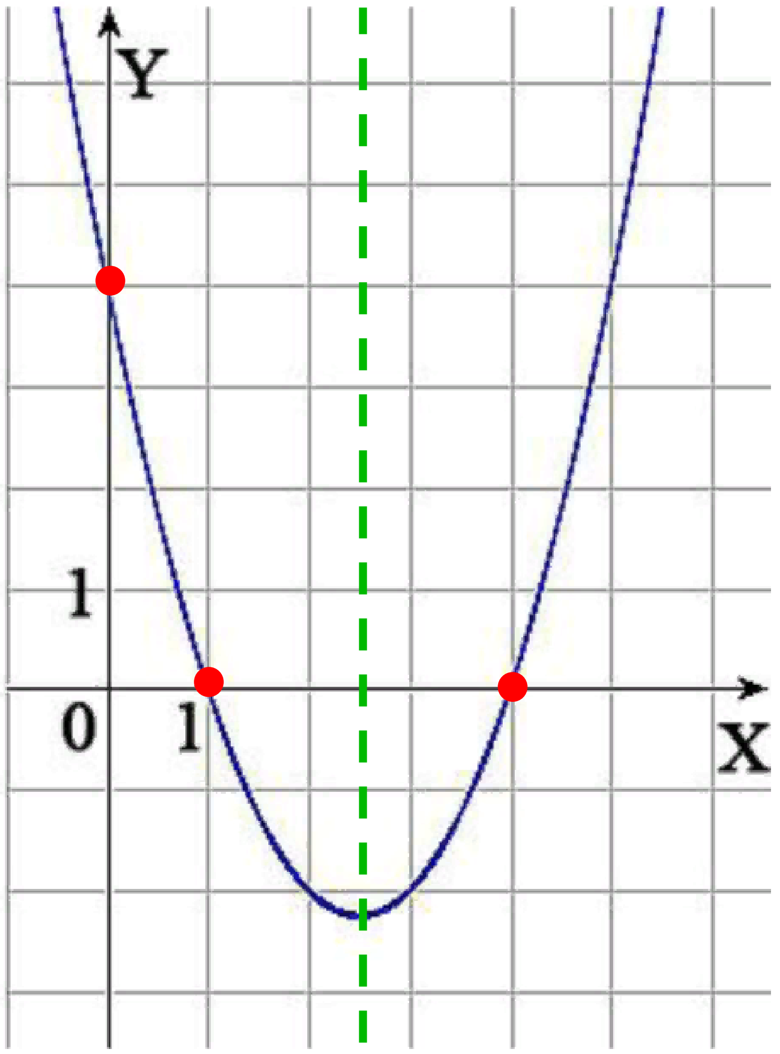
f(- 8)= 64,

а в первоначальной системе координат будем иметь на 3 меньше, т.е. 64 – 3 = 61.



В 9	6	1				

На рисунке изображен график функции вида $f(x) = ax^2 + bx + c$, где числа a, b и c – целые. Найдите $f(-12)$.



Решение.

По графику видно, что $c = 4$. Вершина в точке $x = 2{,}5$, следовательно, $-\frac{b}{2a} = 2{,}5 \Leftrightarrow b = -5a$.

Значение в $x = 1$ равно нулю, значит, $a + b + c = 0$. Получаем систему

$$\begin{cases} c = 4 \\ b = -5a \\ a + b + c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 4 \\ b = -5. \\ a = 1 \end{cases}$$

Далее находим

$$f(-12) = (-12)^2 - 5(-12) + 4$$

Ответ: 208.

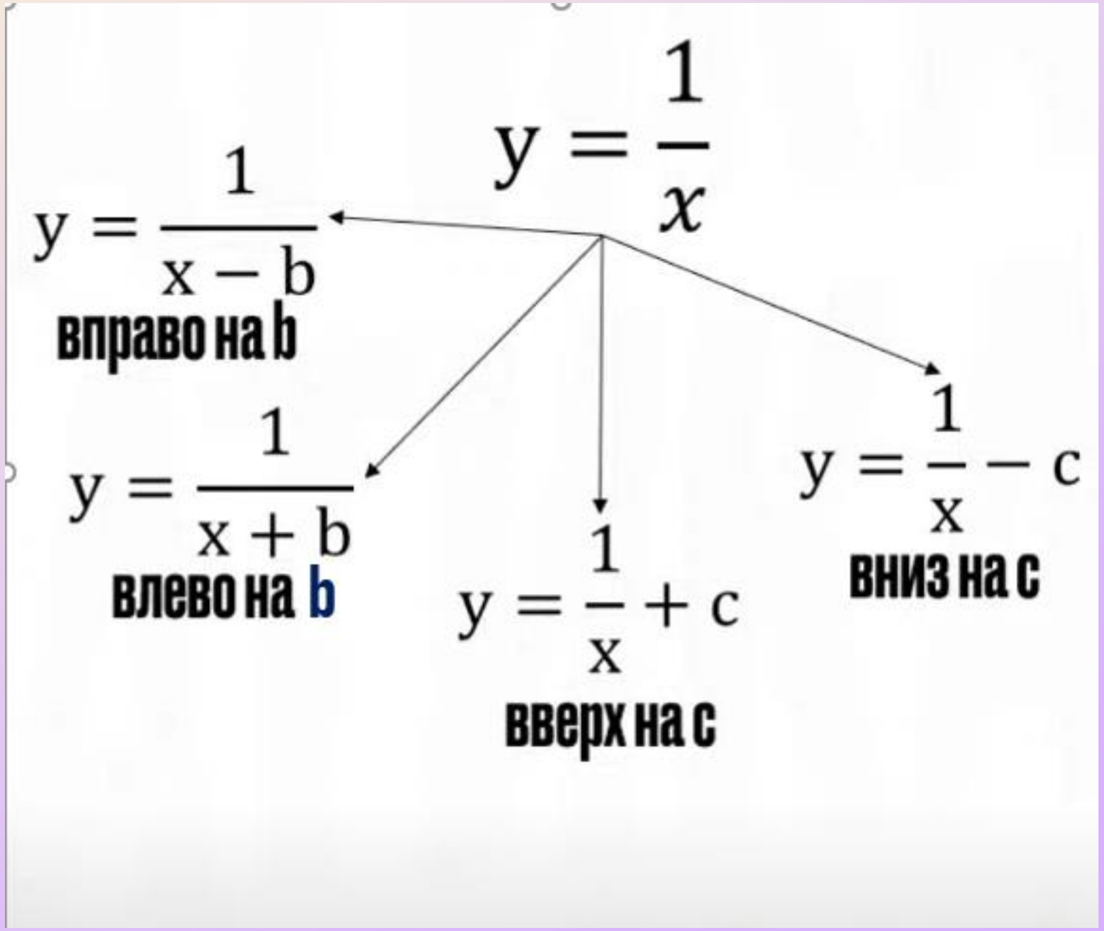
B10	2	0	8			

Степенная функция :

1. функция обратной пропорциональности,

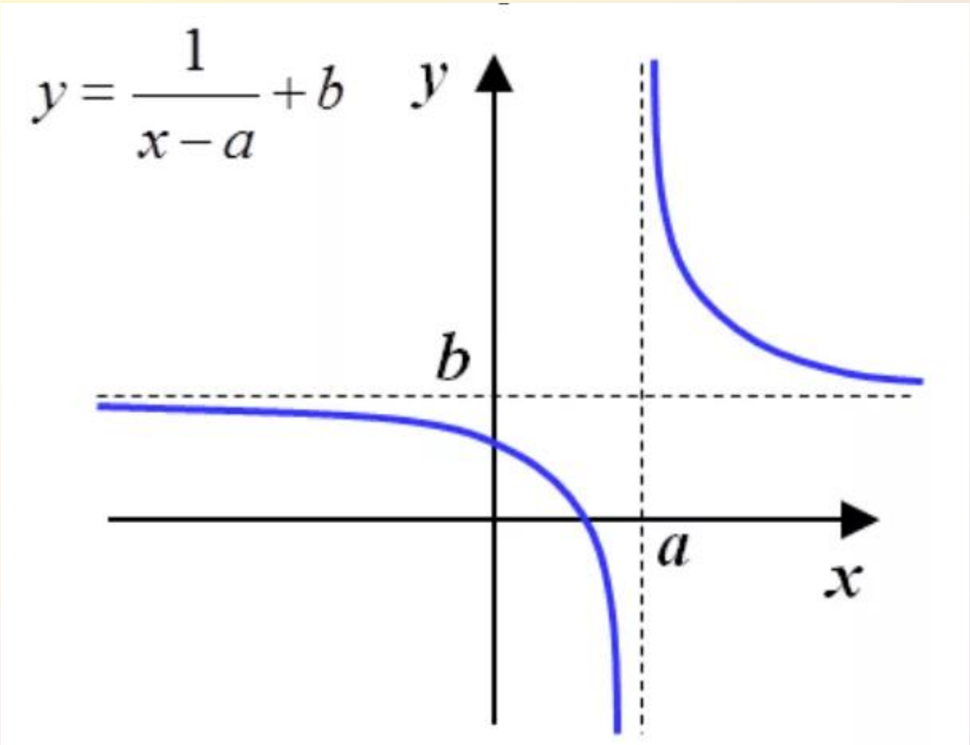
2. функция квадратного корня.


СДВИГИ ГРАФИКОВ
$y = f(x)$
$y = f(x) + p$
вверх на p
$y = f(x) - p$
вниз на p
$y = f(x + m)$
влево на m
$y = f(x - m)$
вправо на m


$y = \frac{1}{x}$
$y = \frac{1}{x - b}$
вправо на b
$y = \frac{1}{x + b}$
влево на b
$y = \frac{1}{x} + c$
вверх на c
$y = \frac{1}{x} - c$
вниз на c

Основная формула $y = \frac{1}{x}$

$$y = \frac{1}{x-a} + b$$

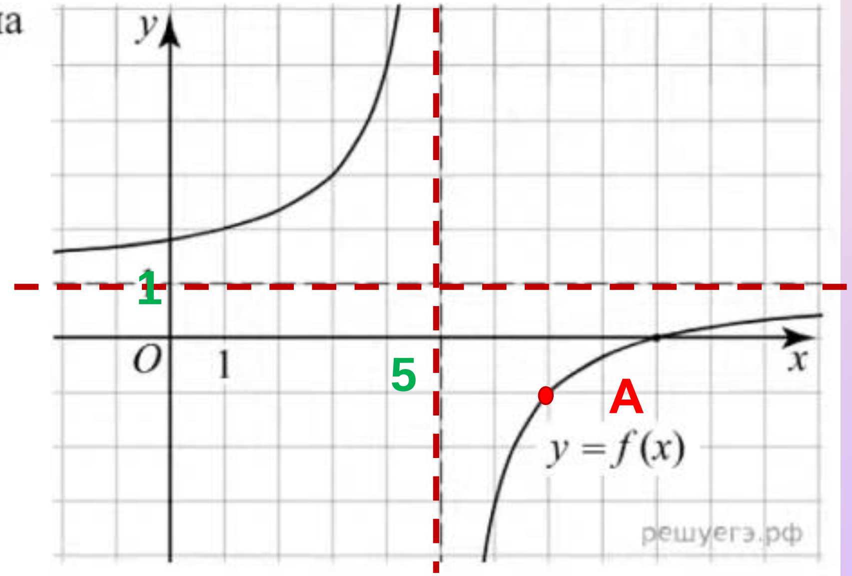


Асимптоты

$y = b$

$x = a$

На рисунке изображён график функции вида $f(x) = \frac{a}{x+b} + c$, где числа a, b и c — целые. Найдите $f(10)$.



Асимптоты x = 5, y = 1

Т.е . b = - 5, c = 1

В новой системе координат функция имеет вид

$$y = \frac{a}{x}$$

Определим a

A(2; - 2) – координаты точки в новой системе координат

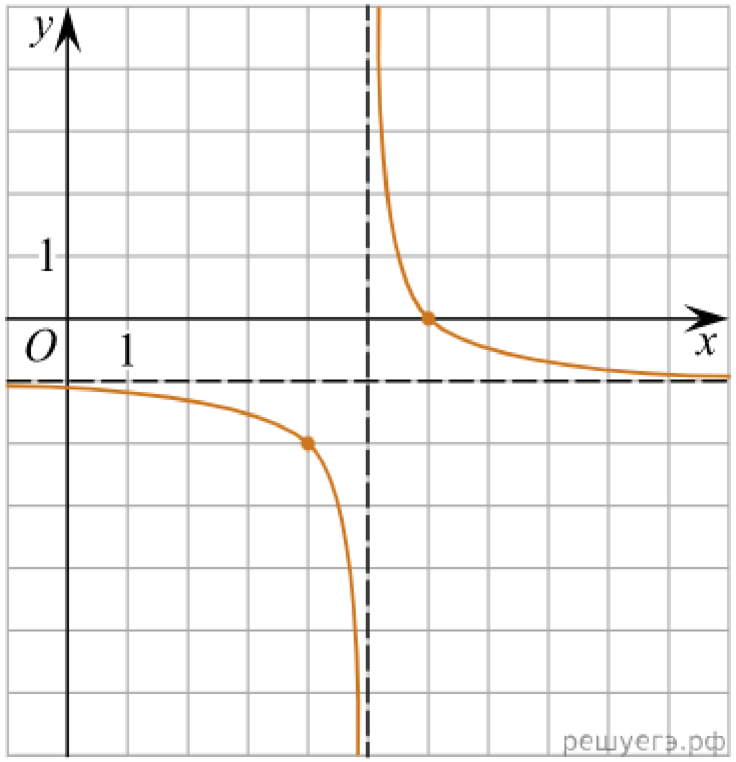
a = - 4

$$f(x) = -\frac{4}{x-5} + 1$$

f(10) = 0,2

B10 | 0 | , | 2

На рисунке изображён график функции вида $f(x)=\dfrac{ax+b}{x+c}$, где числа a, b и c — целые. Найдите a.



Решение.

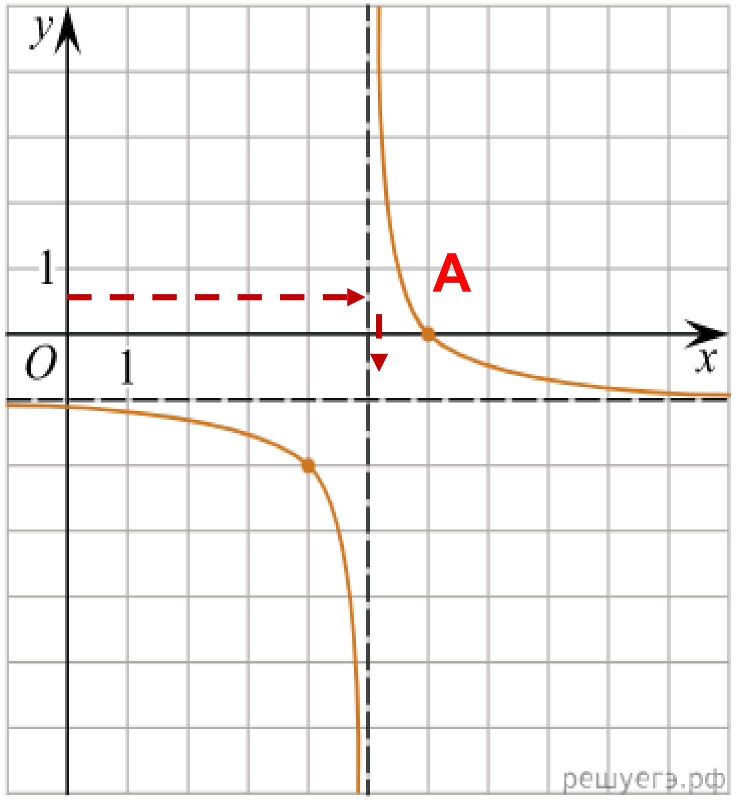
Преобразуем данную функцию:

$$f(x)=\frac{ax+b}{x+c}=\frac{ax+ac+b-ac}{x+c}=\frac{ax+ac}{x+c}+\frac{b-ac}{x+c}=a+\frac{b-ac}{x+c}.$$

График функции имеет горизонтальную асимптоту $y=-1$, значит, $a=-1$.

Ответ: −1.

На рисунке изображён график функции вида $f(x)=\dfrac{ax+b}{x+c}$, где числа a, b и c — целые. Найдите a.



1) В новой системе координат функция у= $\frac{к}{х}$

В новой системе координат найдем к

Имеем А(1;1), тогда к=1

2) Сдвиг вправо на 5 ед. отрезков, то есть с= - 5

Сдвиг вниз на 1 ед. отрезок.

$$f(x)=\frac{1}{x-5}-1=\frac{1-x+5}{x-5}=\frac{-x+6}{x-5}$$

Значит а = - 1

В10	-	1				

На рисунке изображён график функции $f(x)=\frac{kx+a}{x+b}$. Найдите k

$$f(x)=\frac{kx+a}{x+b}\to f(x)=\frac{c}{x+m}+n,$$

где $\boldsymbol{m}$ – это смещение по оси Ox, $\boldsymbol{n}$ – смещение по оси Oy

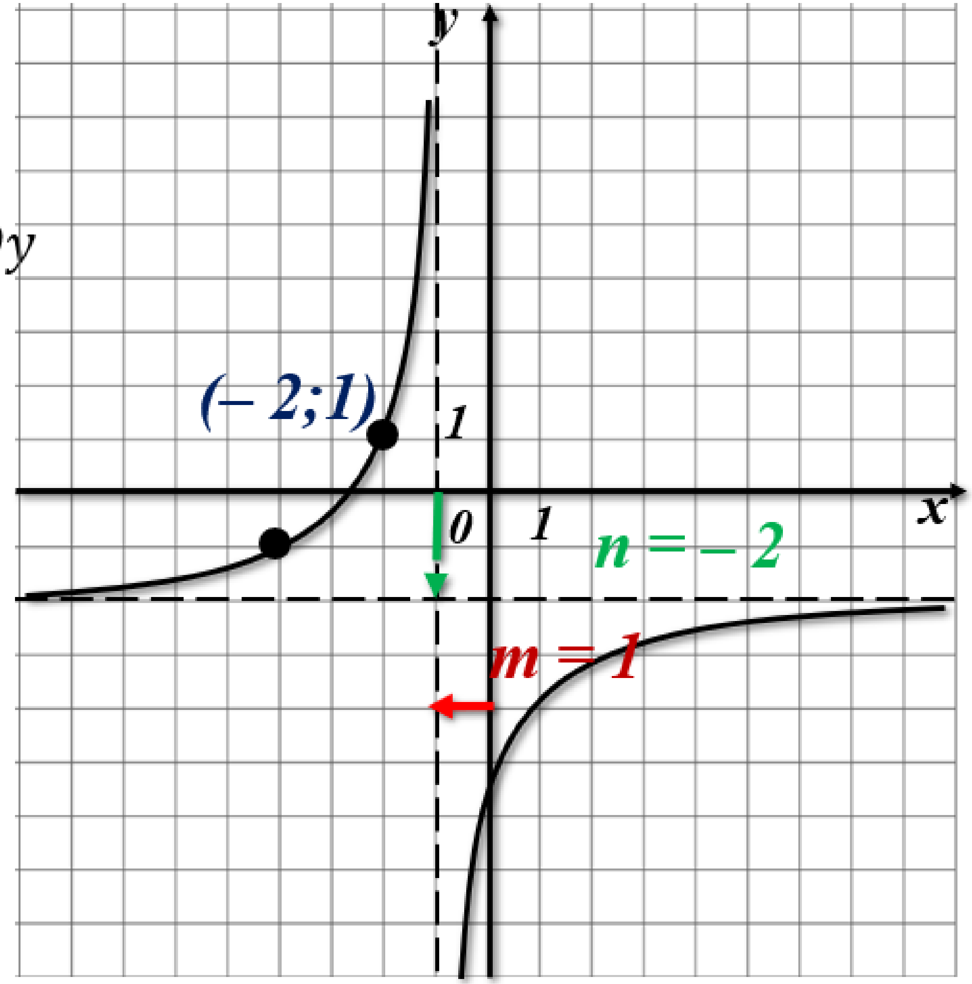
$$\boldsymbol{m}=\mathbf{1},\boldsymbol{n}=-\mathbf{2}\Longrightarrow f(x)=\frac{c}{x+1}-2$$

Используем «хорошую точку»

(– 2;1): $\quad 1=\frac{c}{-2+1}-2\Longrightarrow c=-3$

$$f(x)=\frac{-3}{x+1}-2=\frac{-2x-5}{x+1}$$

$k=-2$



B10 | - | 2

На рисунке изображён график функции $f(x) = k\sqrt{x+p}$. Найдите $f(0{,}25)$

$$f(x) = k\sqrt{x+p}$$

где $\boldsymbol{p}$ – это смещение по оси Ox

$$\boldsymbol{p} = \mathbf{2} \Longrightarrow f(x) = k\sqrt{x+2}$$

Используем «хорошую точку»

(2; 3): $3 = k\sqrt{2+2}$

$$2k = 3$$

$$k = 1{,}5$$

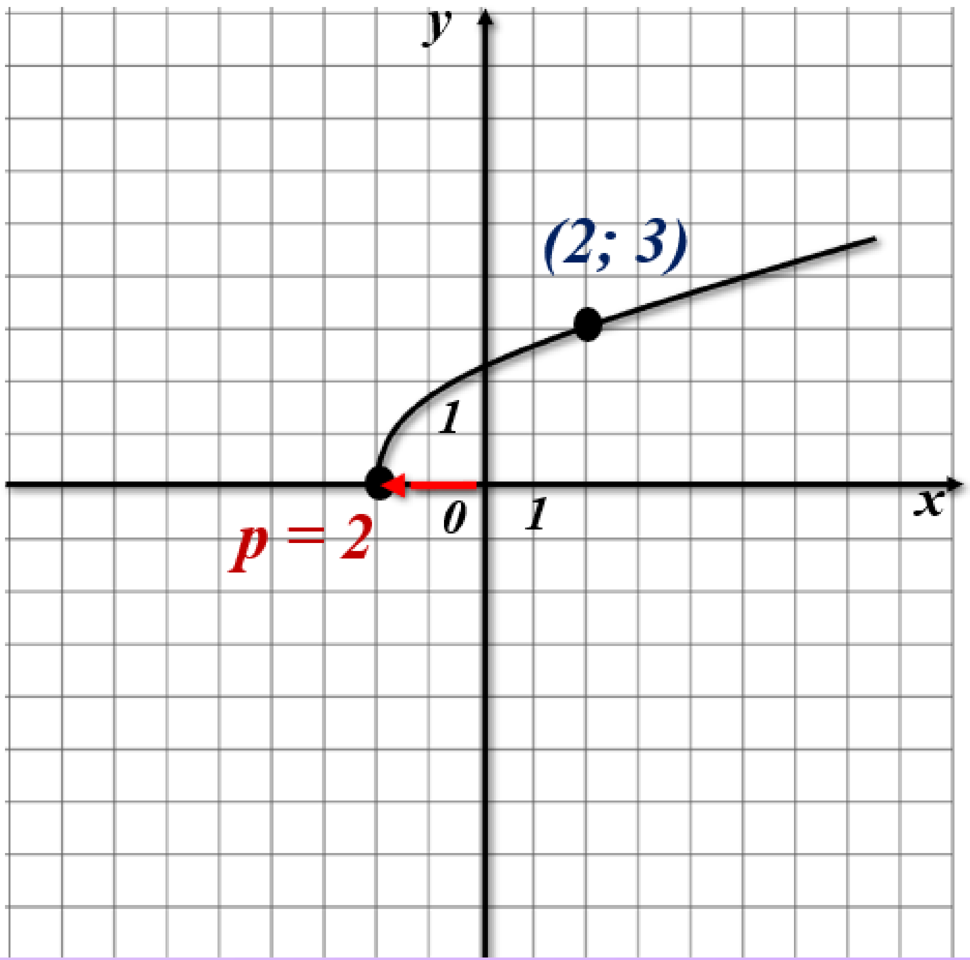
$$\Longrightarrow \boldsymbol{f(x) = 1{,}5\sqrt{x+2}}$$

$$f(0{,}25) = 1{,}5\sqrt{0{,}25+2}$$

$$f(0{,}25) = 1{,}5\sqrt{2{,}25}$$

$$f(0{,}25) = 1{,}5 \cdot 1{,}5$$

$$f(0{,}25) = 2{,}25$$



На рисунке изображён график функции $f(x) = k\sqrt{x} + p$. Найдите значение x, при котором $f(x) = -10$

$$f(x) = k\sqrt{x} + p$$

где $\boldsymbol{p}$ – это смещение по оси Oy

$$\boldsymbol{p} = \mathbf{2} \Longrightarrow f(x) = k\sqrt{x} + 2$$

Используем «хорошую точку»

(4;– 4): $-4 = k\sqrt{4} + 2$

$$2k = -6$$

$$k = -3$$

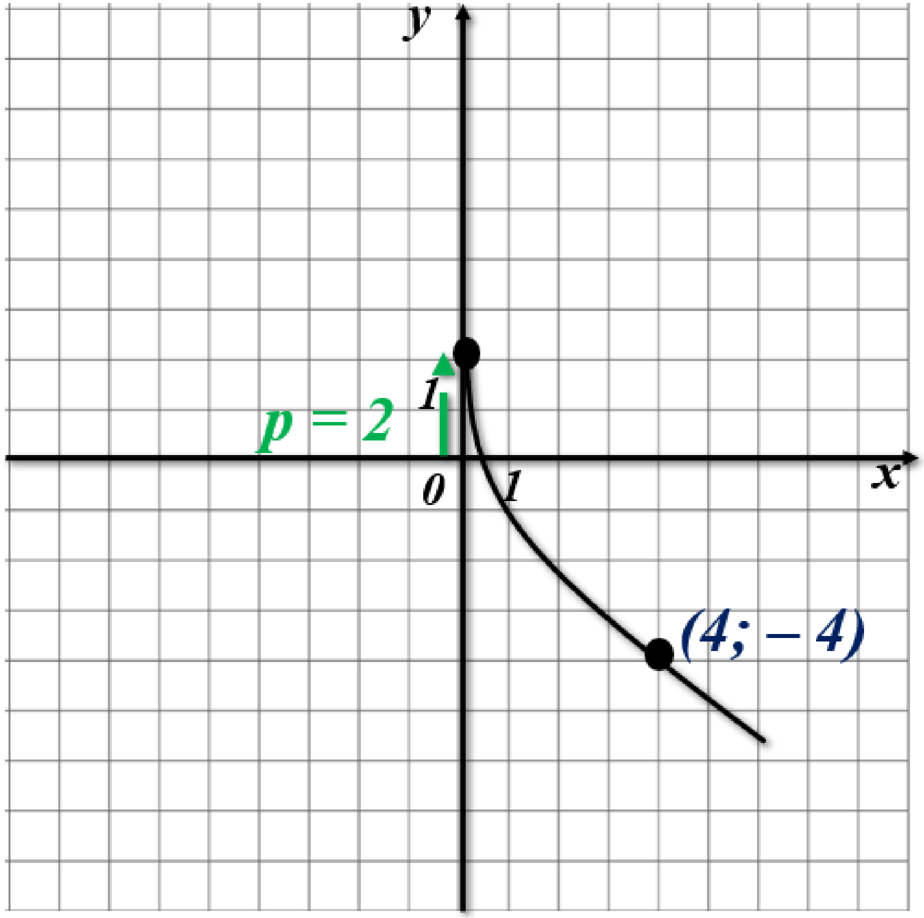
$$\Longrightarrow \boldsymbol{f(x) = -3\sqrt{x} + 2}$$

$$-3\sqrt{x} + 2 = -10$$

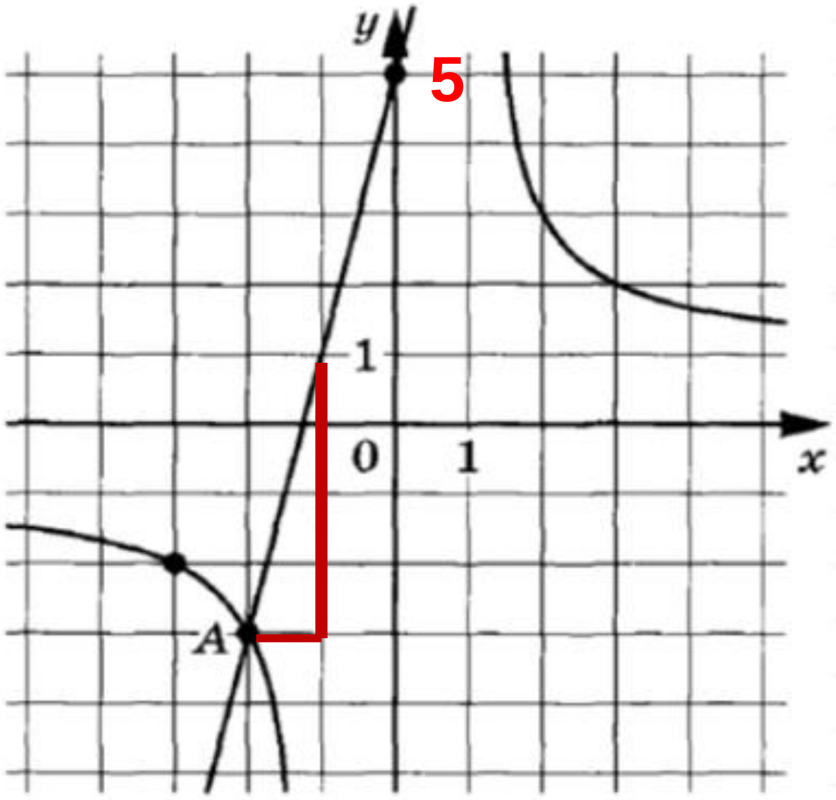
$$-3\sqrt{x} = -12$$

$$\sqrt{x} = 4$$

$$x = 16$$



На рисунке изображены графики функций $f(x)=\dfrac{k}{x}$ и $g(x)=ax+b$, которые пересекаются в точках $A(-2;\ 3)$ и $B(x_0;\ y_0)$. Найдите x_0.



g(x) = ax + b
a = 4, b = 5
g(x) = 4x + 5

k/(-2) = - 3
k = 6
f(x) = 6/x

6/x = 4x + 5

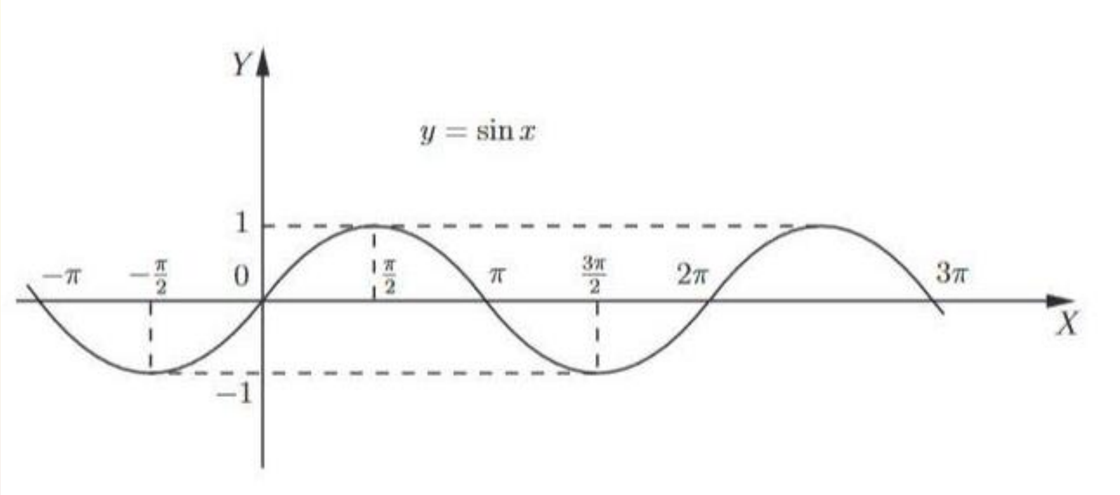
$4x^2 + 5x - 6 = 0$

Найдем корни уравнения x= - 2, x = 0,75

B10 | 0 | , | 7 | 5

Тригонометрические функции, их графики

Тригонометрические функции. Необходимая теория

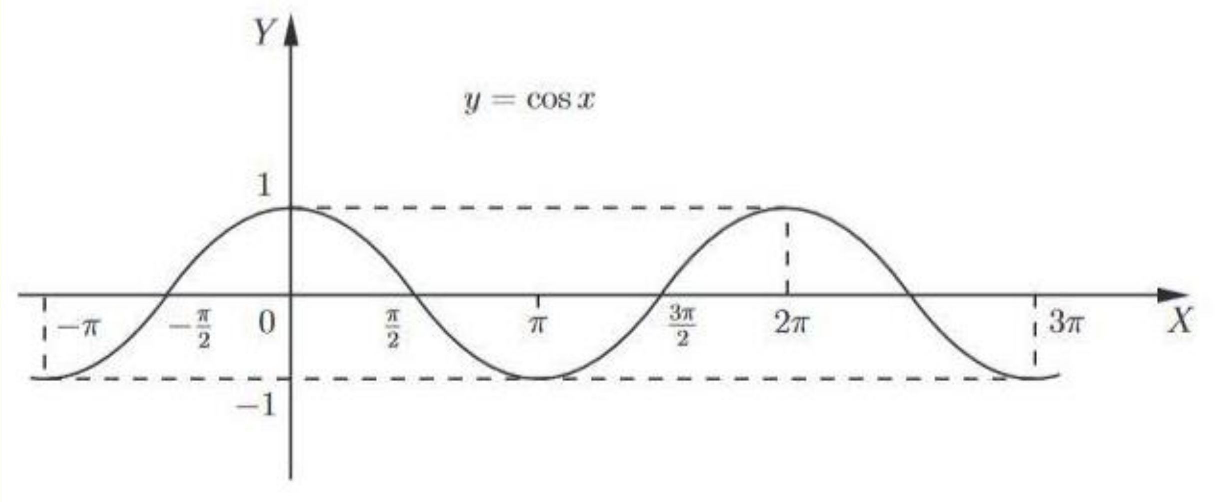


1) D(y): x ∈ R, то есть область определения — все действительные числа.

2) E(y): y ∈ [−1; 1]. Это означает, что наибольшее значение функции y = sin x равно единице, а наименьшее — минус единице.

3) Функция y = sin x — нечетная. Ее график симметричен относительно нуля.

4) Функция y = sin x — периодическая. Ее наименьший положительный период равен 2π.



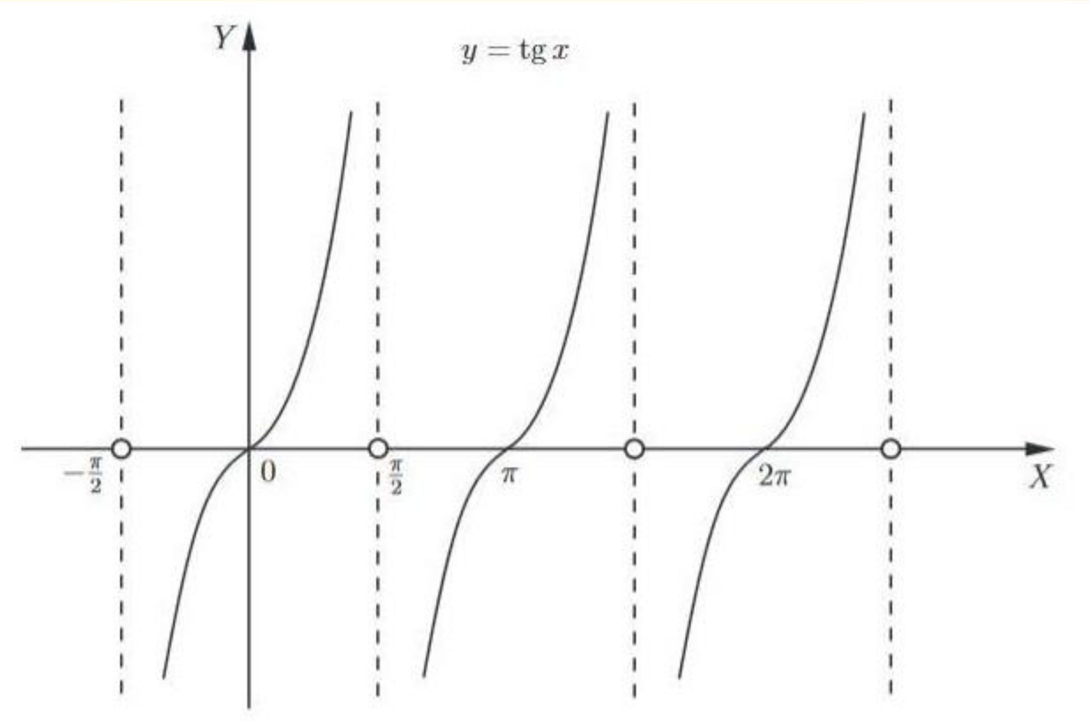
1) D(y): x ∈ R, то есть область определения — все действительные числа.

2) E(y): y ∈ [−1; 1]. Это означает, что наибольшее значение функции y = cos x равно единице, а наименьшее — минус единице.

3) Функция y = cos x — четная. Ее график симметричен относительно оси Y.

4) Функция y = cos x — периодическая. Ее наименьший положительный период равен 2π.

Отметим еще одно свойство. Графики функций y = sin x и y = cos x весьма похожи друг на друга. Можно даже сказать, что график косинуса получится, если график синуса сдвинуть на $\frac{\pi}{2}$ влево. Так оно и есть — по одной из формул приведения, $\sin(x + \frac{\pi}{2}) = \cos x$.



1) $D(y) : x \in (-\frac{\pi}{2} + \pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n)$.

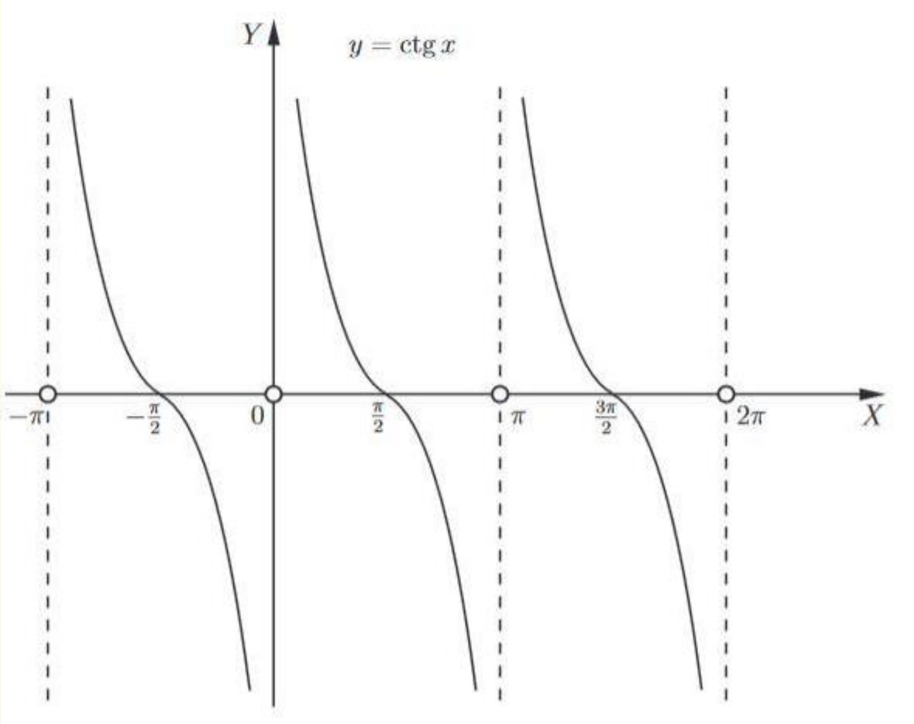
Другими словами, тангенс не определен для $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, где n ∈ Z.

2) Область значений E(y) — все действительные числа.

3) Функция y = tg x — нечетная. Ее график симметричен относительно начала координат.

4) Функция y = tg x — периодическая. Ее наименьший положительный период равен π.

5) Функция y = tg x возрастает при $x \in (-\frac{\pi}{2} + \pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n)$, то есть на каждом участке, на котором она непрерывна.



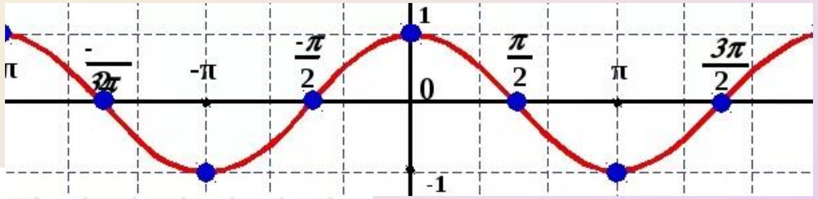
1) $D(y): x \in (\pi n; \pi n + \pi)$.
Другими словами, котангенс не определен для $x = \pi n$ где n ∈ Z.

2) Область значений E(y) - все действительные числа.

3) Функция y = ctg x — нечетная. Ее график симметричен относительно начала координат.

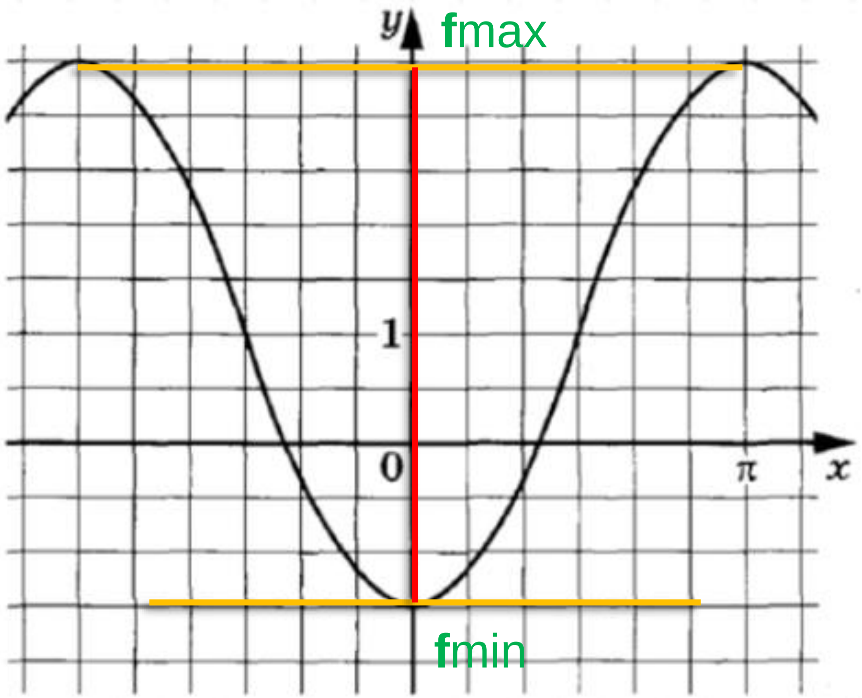
4) Функция y = ctg x — периодическая. Ее наименьший положительный период равен π.

5) Функция y = ctg x убывает при $x \in (\pi n; \pi n + \pi)$, то есть на каждом участке, на котором она непрерывна.



9 На рисунке изображён график функции $f(x) = a\cos x + b$. Найдите a.

Ответ:____________________.



Решение

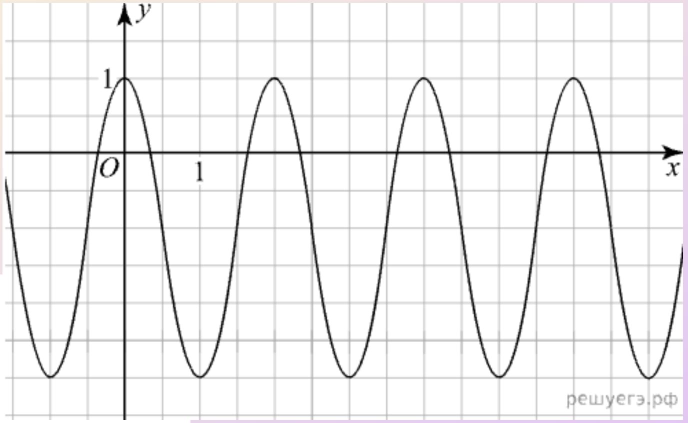
Расстояние между наибольшим и наименьшим значением равно 5

$$|a| = \frac{f_{max} - f_{min}}{2} = 2{,}5$$

Т.к. $a<0$, то $a = -2{,}5$

В 9 | - | 2 | , | 5

На рисунке изображён график функции вида $f(x) = a\cos(b\pi x + c) + d$, где числа a, b, c и d — целые. Найдите $f\left(\frac{100}{3}\right)$.



По графику $f_{max} = 1$, $f_{min} = -3$, тогда $d = \frac{f_{max} + f_{min}}{2} = \frac{1-3}{2} = -1$, и $|a| = \frac{f_{max} - f_{min}}{2} = \frac{1-(-3)}{2} = 2.$

По графику $f(0) = 1$, тогда, если $a = -2$, то

$$-2\cos c - 1 = 1 \Leftrightarrow \cos c = -1 \text{ — не имеет целочисленных решений,}$$

если $a = 2$, то

$$2\cos c - 1 = 1 \Leftrightarrow \cos c = 1 \Leftrightarrow c = 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z} \underset{c\in\mathbb{Z}}{\Leftrightarrow} c = 0.$$

Значит, $a = 2$ и $c = 0$.

Найдём наименьший положительный период функции $f(x) = 2\cos(b\pi x) - 1$:

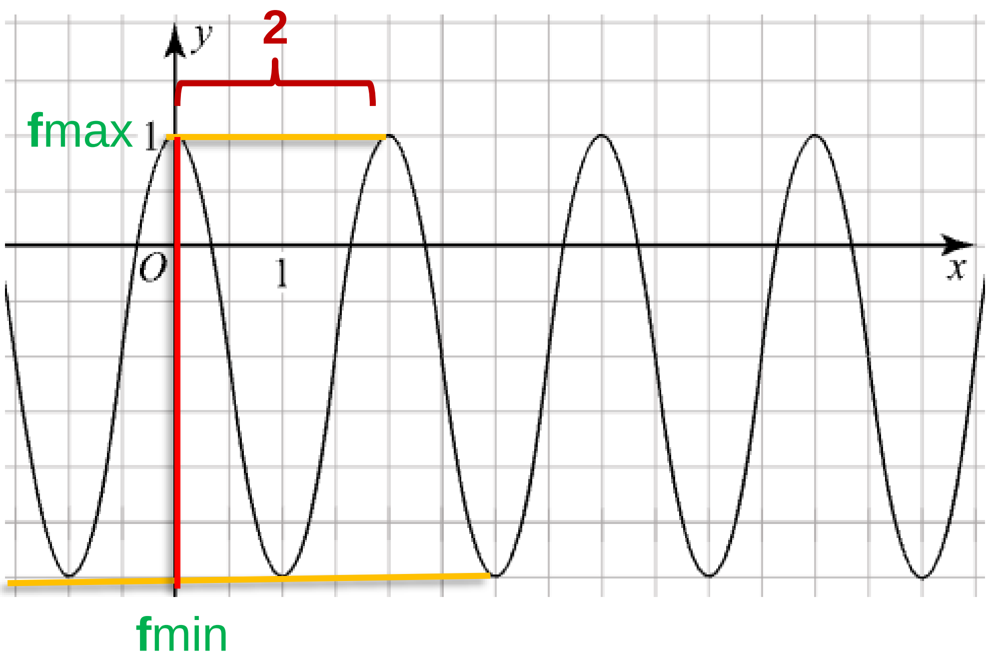
$$2\cos(b\pi x) - 1 = 2\cos(b\pi x \pm 2\pi) - 1 = 2\cos\left(b\pi\left(x \pm \frac{2}{b}\right)\right) - 1$$

Наименьший положительный период функции $f(x)$ равен $\pm\frac{2}{b}$, а по графику наименьший положительный период равен 2, тогда $b = \pm 1$.

Таким образом, $f(x) = 2\cos(-\pi x) - 1 = 2\cos(\pi x) - 1$. Найдём $f\left(\frac{100}{3}\right)$.

$$f\left(\frac{100}{3}\right) = 2\cos\frac{100\pi}{3} - 1 = 2\cos\frac{4\pi}{3} - 1 = -2.$$

На рисунке изображён график функции вида $f(x) = a\cos(b\pi x + c) + d$, где числа a, b, c и d — целые. Найдите $f\left(\frac{100}{3}\right)$.



$$|a| = \frac{f_{max} - f_{min}}{2} = \frac{1+3}{2} = 2$$

$$d = \frac{f_{max} + f_{min}}{2} = \frac{1-3}{2} = -1;$$

Так как график функции симметричен относительно оси Оу, то с = 0.

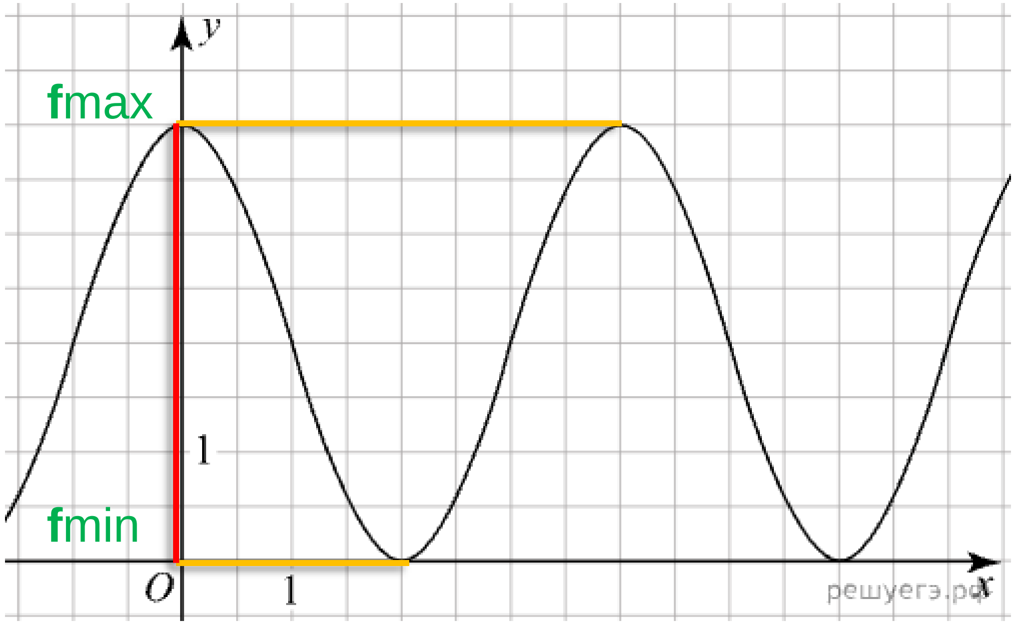
$$T = \frac{T_0}{к} = 2,$$ где $T_{0(COSX)} = 2\pi$ и $к = b\pi$. Откуда $b=1$

Тогда $f(x) = 2\cos(\pi x) - 1$

Найдем $f(100/3) = 2\cos(100\pi/3) - 1 = 2\cos(4\pi/3) - 1 = -2$

B10	-	2				

На рисунке изображён график функции вида $f(x) = a\cos\left(\frac{\pi x}{b} + c\right) + d$, где числа a, b, c и d — целые. Найдите $f\left(f\left(\frac{14}{3}\right)\right)$.



$$|a| = \frac{f_{max} - f_{min}}{2} \qquad d = \frac{f_{max} + f_{min}}{2}$$

По графику найдем $f_{max} = 4$, $f_{min} = 0$

a = 2 (a>0), d = 2 , c = 0

$$T = \frac{T_0}{к} = 4,$$ где $T_{0(\cos x)} = 2\pi$ и $к = \pi/b$. Откуда b=2

$f(x) = 2\cos(\pi x /2) + 2$

$f(14/3) = 2\cos(7\pi/3) + 2 = 3$

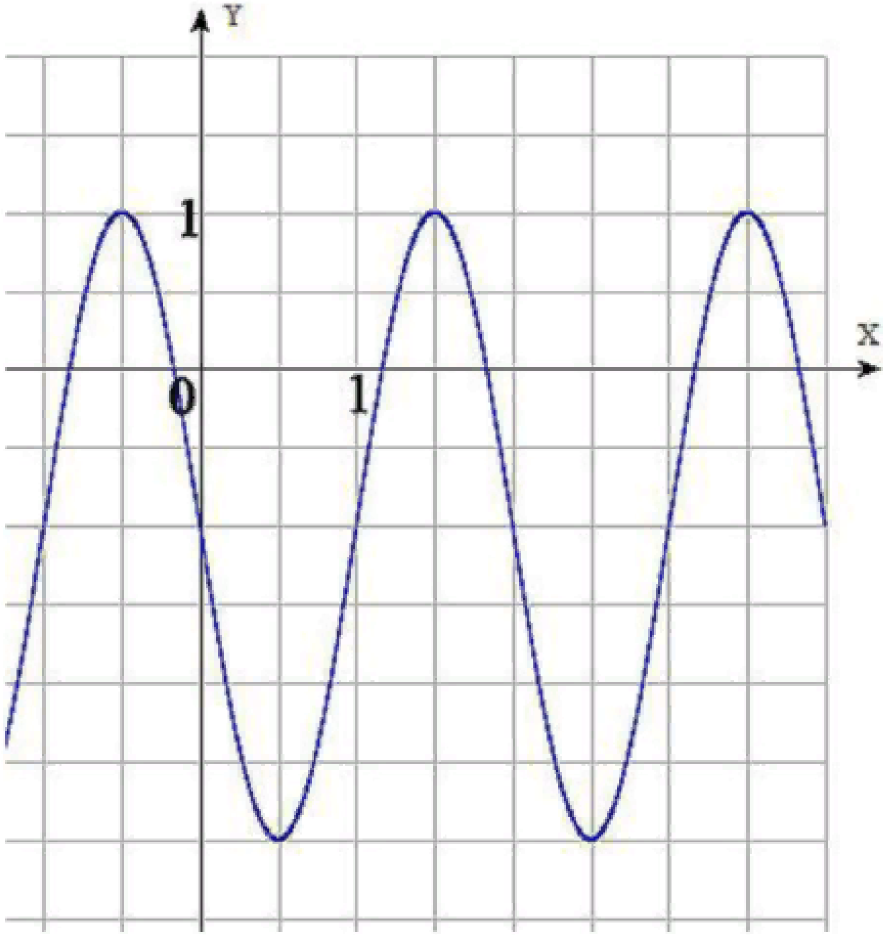
$f(3) = 2$

B10	2					

На рисунке изображен график функции вида

$$f(x) = a \cdot \sin(b\pi x) + c,$$

где числа a, b и c – целые. Найдите $f\left(\frac{23}{6}\right)$.



Решение.

1) $f(0) = a \cdot \sin(0) + c = -1 \Leftrightarrow 0 + c = -1$, следовательно, $c = -1$.

2) Наименьший положительный период равен 2, следовательно,

$$2b\pi = 2\pi \Rightarrow b = 1.$$

3) По графику $f_{min} = -3$, а $f_{max} = 1$. Тогда

$$a = \pm\frac{f_{max} - f_{min}}{2} = \pm 2.$$

Так как график в окрестности $x = 0$ убывает, то $a = -2$.

Далее находим

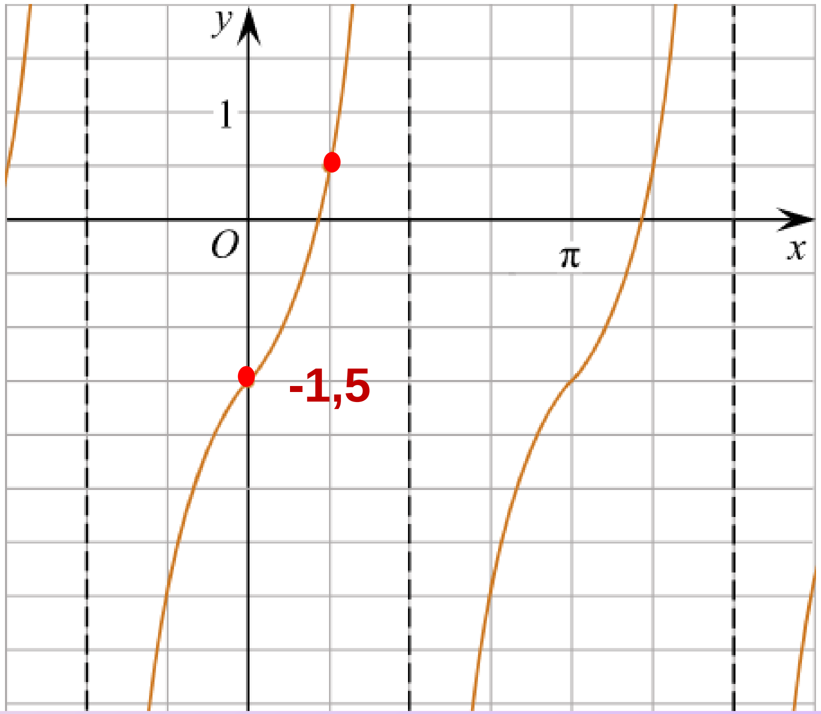
$$f\left(\frac{23}{6}\right) = -2\sin\left(\pi \cdot \frac{23}{6}\right) - 1$$

$$= -2\sin\left(4\pi - \frac{1}{6}\pi\right) - 1$$

$$= 2\sin\left(\frac{1}{6}\pi\right) - 1 = 0.$$

B10	0					

На рисунке изображён график функции $f(x) = a\,\mathrm{tg}\,x + b$. Найдите a.



По графику, $f(0) = -1,5$, тогда

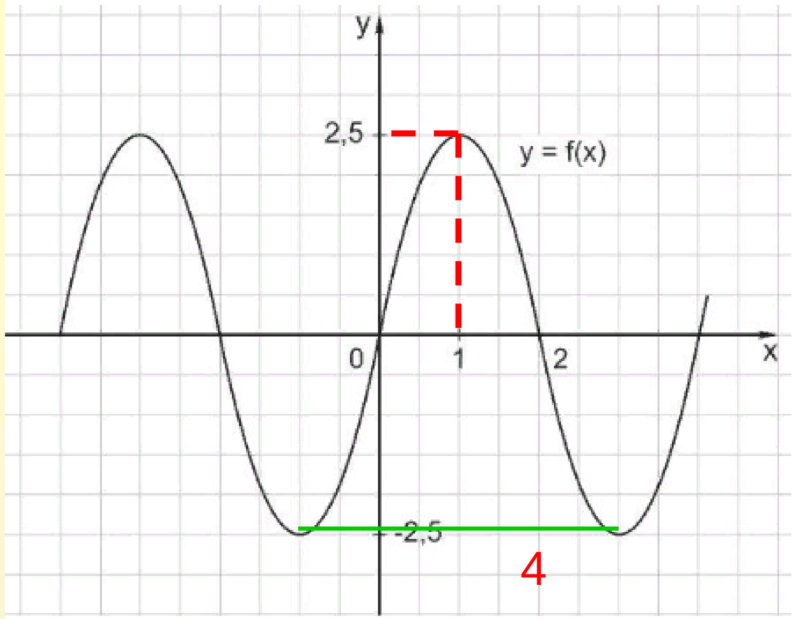
$$a\,\mathrm{tg}\,0 + b = -1,5 \Leftrightarrow a \cdot 0 + b = -1,5 \Leftrightarrow b = -1,5.$$

Далее, по графику, $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0,5$, тогда

$$a\,\mathrm{tg}\,\frac{\pi}{4} - 1,5 = 0,5 \Leftrightarrow a = 2.$$

B10	2					

. На рисунке изображен график периодической функции y = f(x). Найдите значение выражения $f(21) - f(-9)$.



Решение:

Функция, график которой изображен на рисунке, не только периодическая, но и нечетная, и если $y(1) = 2,5$, то $y(-1) = -2,5$.

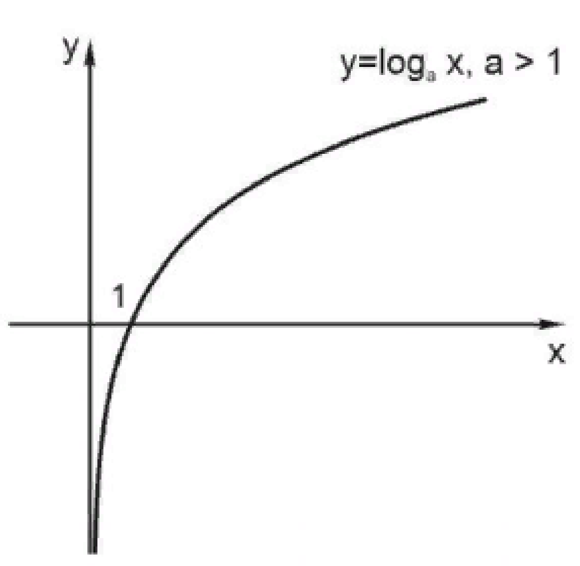
Пользуясь периодичностью функции $f(x)$, период которой T = 4, получим:

$f(21) = f(1 + 4 \cdot 5) = f(1) = 2,5;$

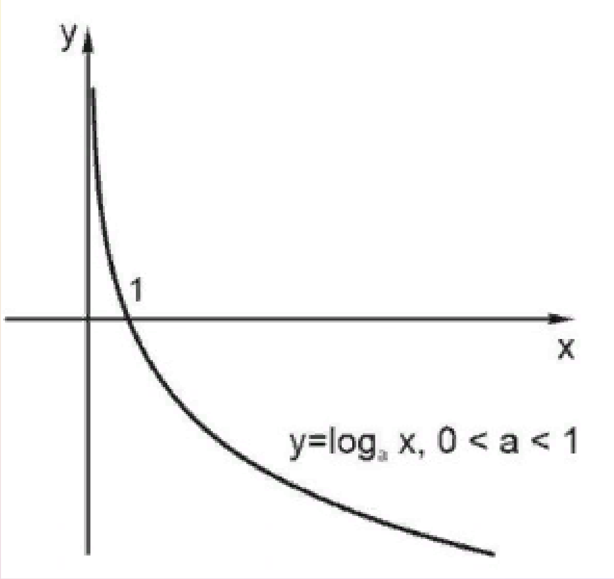
$f(-9) = f(-1 - 4 \cdot 2) = f(-1) = -2,5;$

$f(21) - f(-9) = 2,5 - (-2,5) = 5.$

Логарифмическая и показательная функции , их график



Логарифмическая функция. Необходимая теория



1. Область определения — все положительные числа: D(y) = $(0; +\infty)$.

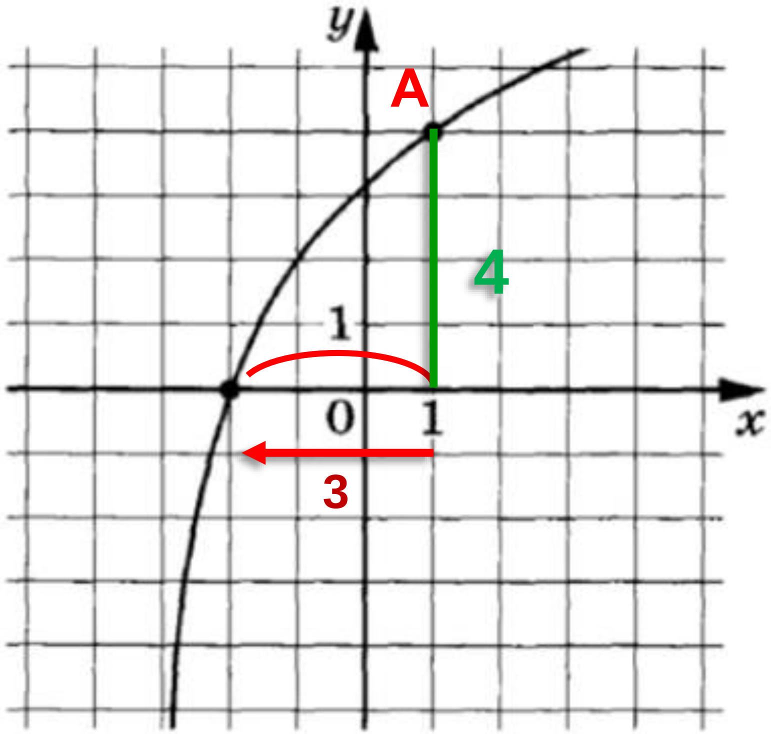
2. Область значений — все действительные числа: E(y) = $(-\infty; +\infty)$.

3. Поскольку $log_a 1 = 0$, график проходит через точку (1; 0).

4. Функция монотонно возрастает при a > 1 и монотонно убывает при 0 < a < 1:

На рисунке изображён график функции $f(x)=\log_a(x+b)$. Найдите $f(13)$.

Ответ:________________.



b = 3

$\log_a(1+3)=4$, так как A(1; 4)

$\log_a 4 = 4$

$a^4 = 4$

a=$\sqrt{2}$

f(x)=$\log_{\sqrt{2}}(x+3)$

f(13) = $\log_{\sqrt{2}}$(13+3) = 8

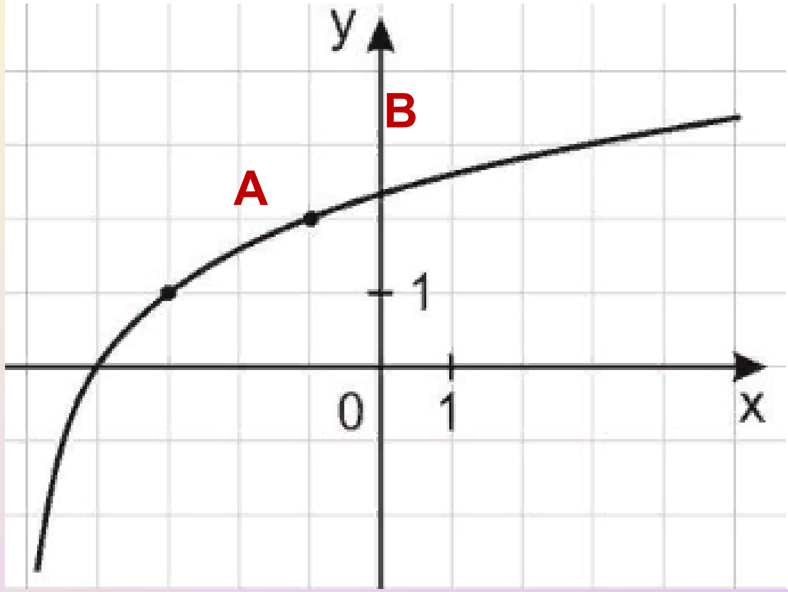
B10	8

График функции проходит через точки A(-3;1) и B(-1;2). Подставив по очереди координаты этих точек в формулу функции, получим:

$$\begin{cases} log_a(-3+b)=1 \\ log_a(-1+b)=2 \end{cases}.$$

Отсюда: $\begin{cases} b-3=a \\ b-1=a^2 \end{cases}.$

. На рисунке изображён график функции $f(x)=log_a(x+b)$. Найдите $f(11)$.



Вычтем из второго уравнения первое:

$a^2-a=2; a^2-a-2=0;$

$a=2$ или $a=-1$ — не подходит, так как $a>0$ (как основание логарифма).

Тогда $b=a+3=5; f(x)=log_2(x+5)$;

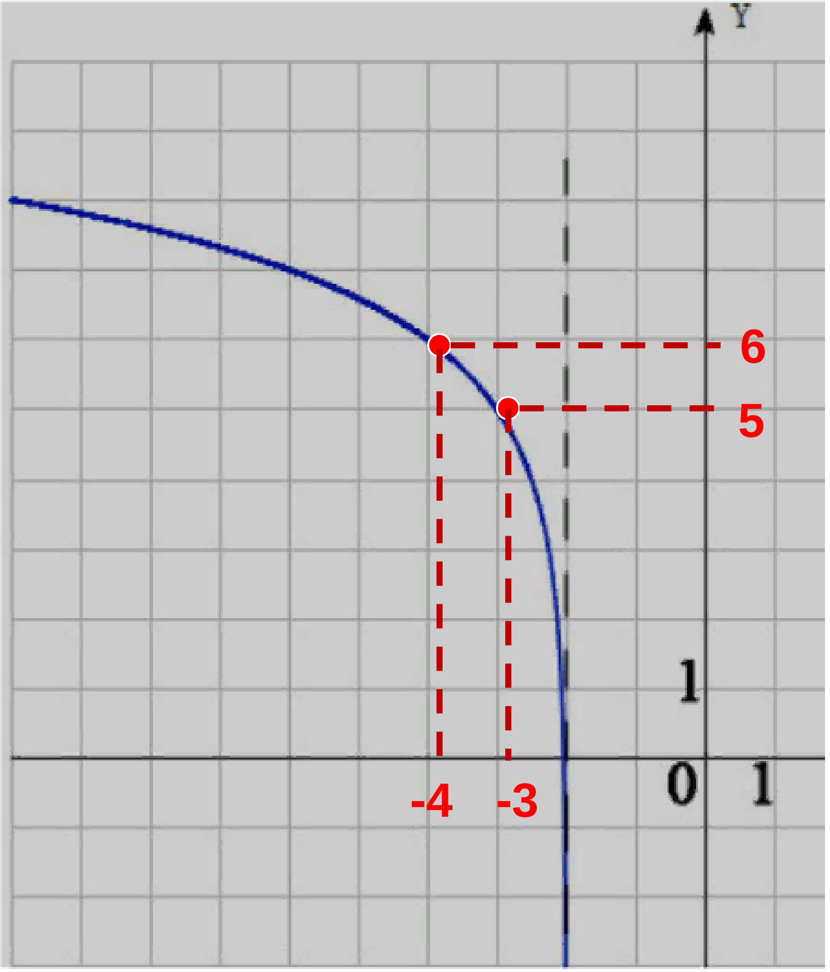
$f(11)=log_2 16=4.$

B10	4					

На рисунке изображен график функции вида

$$f(x) = \log_2(ax + b) + c,$$

где числа a, b и c – целые. Найдите $f(-130)$.



Решение.

Из внешнего вида графика видно, что $a < 0$.

Преобразуем функцию

$$f(x) = \log_2(ax + b) + c = \log_2|a|\left(-x + \frac{b}{|a|}\right) + c$$

$$= \log_2\left(-x + \frac{b}{|a|}\right) + (\log_2|a| + c)$$

Обозначим $m = \frac{b}{|a|}$ и $n = \log_2|a| + c$. Перепишем функцию в виде

$$f(x) = \log_2(-x + m) + n.$$

Найдем теперь m и n.

Наш график получается из графика $y = \log_2(-x)$ сдвигом влево на 2 относительно оси OY, следовательно, $m = -2$ и сдвигом вверх на 5 относительно оси OX, следовательно, $n = 5$.

Далее находим

$$f(-130) = \log_2(130 - 2) + 5 = 12.$$

B10	1	2				

На рисунке изображен график функции $f(x)=a\log_5 x - c$.
Найдите a+c.

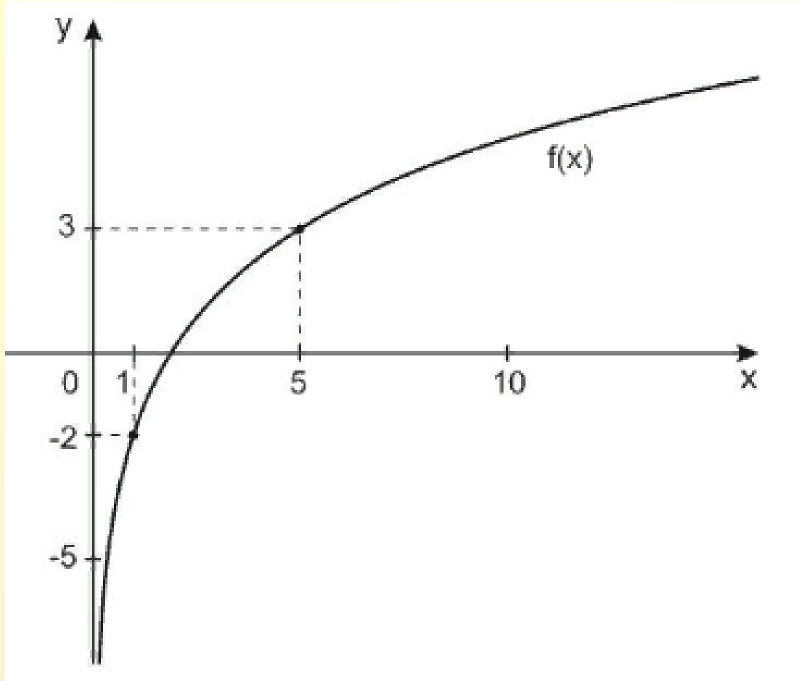


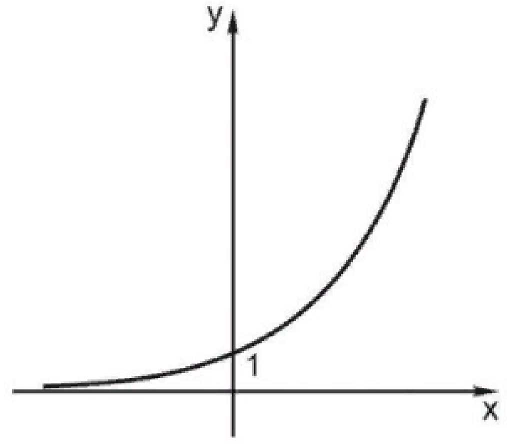
График логарифмической функции на рисунке проходит через точки $(1;-2)$ и $(5;3)$. Подставив по очереди координаты этих точек в формулу функции, получим систему уравнений:

$$\begin{cases} alog_5 1 - c = -2 \\ alog_5 5 - c = 3 \end{cases};$$

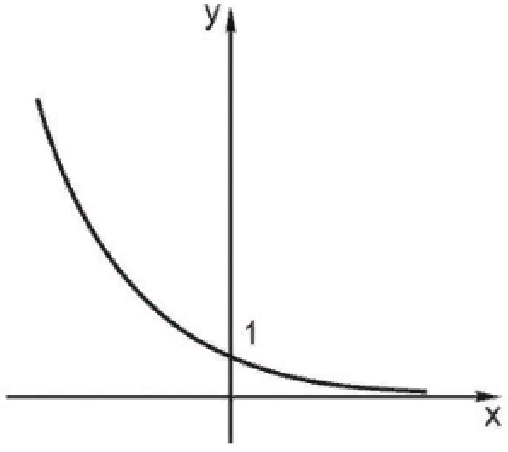
$$\begin{cases} -c = -2 \\ a - c = 3 \end{cases};$$

$$\begin{cases} c = 2 \\ a = 5 \end{cases}.$$

a + c = 5 + 2 = 7



Случай a > 1



Случай 0 < a < 1

Показательная функция. Необходимая теория

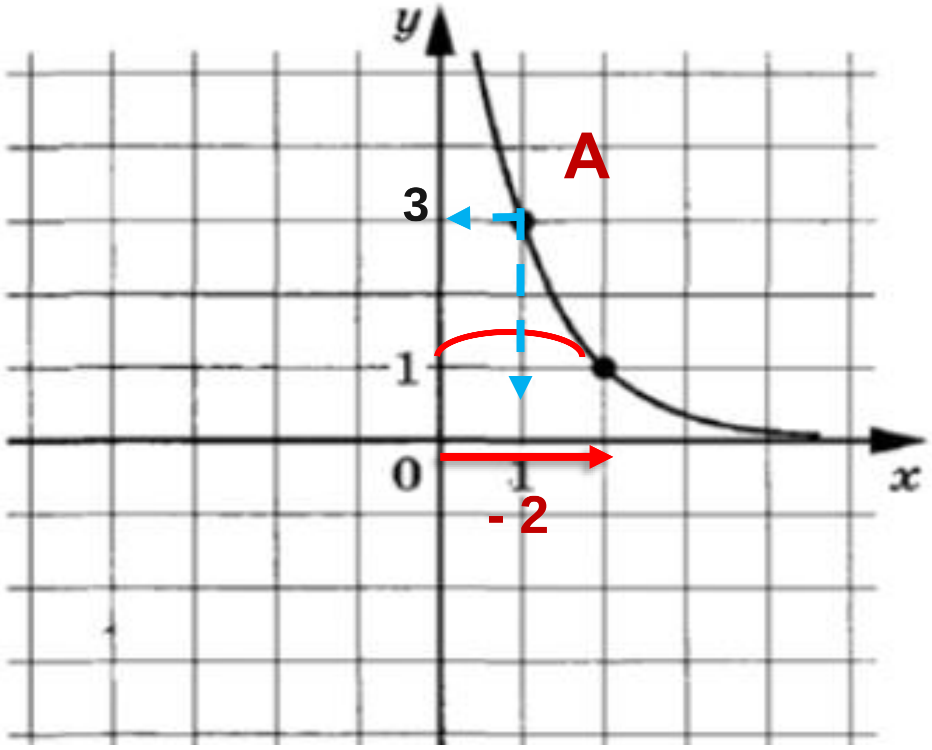
1. Область определения функции — все действительные числа: D(y) = R.

2. Область значений функции: E(y) = $(0; +\infty)$.

3. Поскольку $a^0 = 1$, график проходит через точку (0, 1).

4. При a > 1 функция возрастает. При 0 < a < 1 функция убывает.

На рисунке изображён график функции $f(x)=a^{x+b}$. Найдите $f(-1)$.



Ответ:__________________.

По графику определим b: b = - 2

По графику определим координаты точки А : А(1;3)

$a^{1-2}=3$ $\quad a^{-1}=3$ $\quad a=\frac{1}{3}$

$f(x)=\left(\frac{1}{3}\right)^{x-2}$

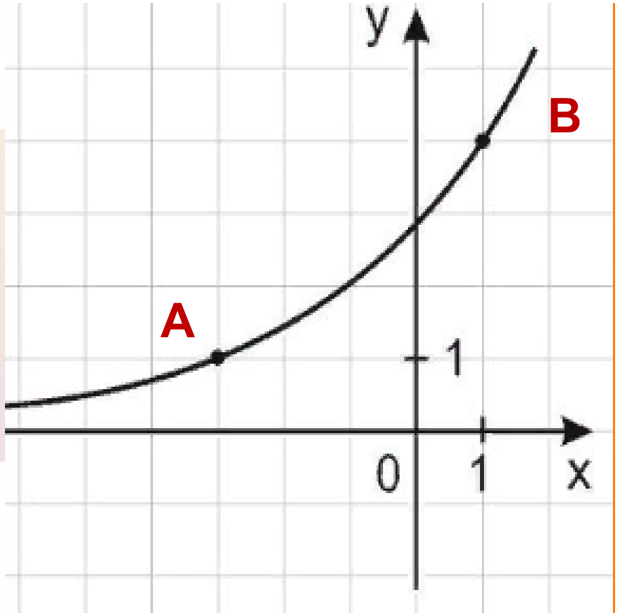
$f(-1)=\left(\frac{1}{3}\right)^{-1-2}=27$

B10	2	7				

График функции проходит через точки A(-3;1) и B(1;4). Подставив по очереди координаты этих точек в формулу функции, получим:

$$\begin{cases} a^{-3+b} = 1 \\ a^{1+b} = 4 \end{cases}.$$

1. На рисунке изображён график функции $f(x) = a^{x+b}$. Найдите $f(-7)$.



Поделим второе уравнение на первое:

$$a^{1+b+3-b} = 4;\ a^4 = 4;\ a = \sqrt{2}.$$

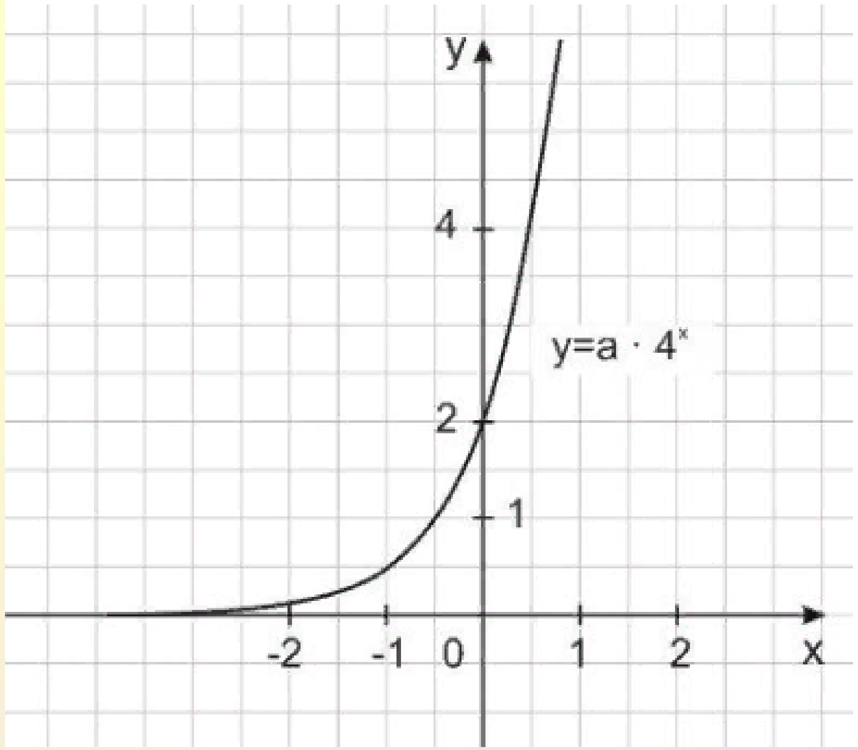
Подставим во второе уравнение:

$$\sqrt{2}^{1+b} = 4;\ 2^{\frac{1+b}{2}} = 2^2;\ 1+b = 4;\ b = 3.$$

$$f(x) = \left(\sqrt{2}\right)^{x+3};\ f(-7) = \left(\sqrt{2}\right)^{-7+3} = \left(\sqrt{2}\right)^{-4} = \frac{1}{4} = 0,25.$$

B10	0	,	2	5		

2. На рисунке изображен график функции $y = a \cdot 4^x$. Найдите a.



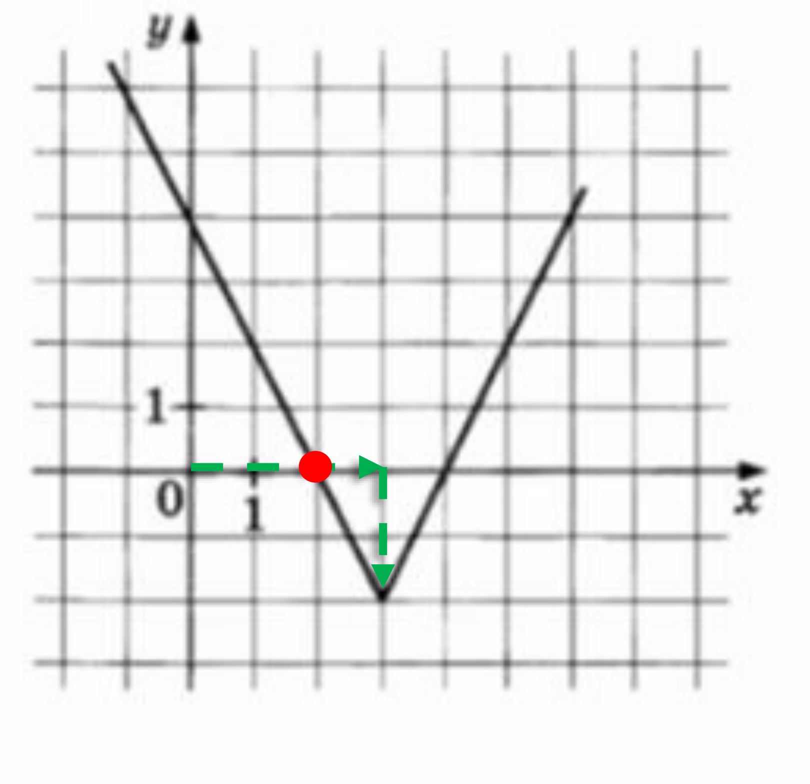
B10	2					

График функции $y = a \cdot 4^x$ проходит через точку $(0;2)$. Это значит, что $y(0) = 2$;

$a \cdot 4^0 = 2; a = 2$, формула функции имеет вид: $y = 2 \cdot 4^x$.

Кусочно-линейная функция, ее график

На рисунке изображен график функции f(x)=|kx+b|+c, где числа k, b и c – целые, k>0. Найдите f(- 15,7).



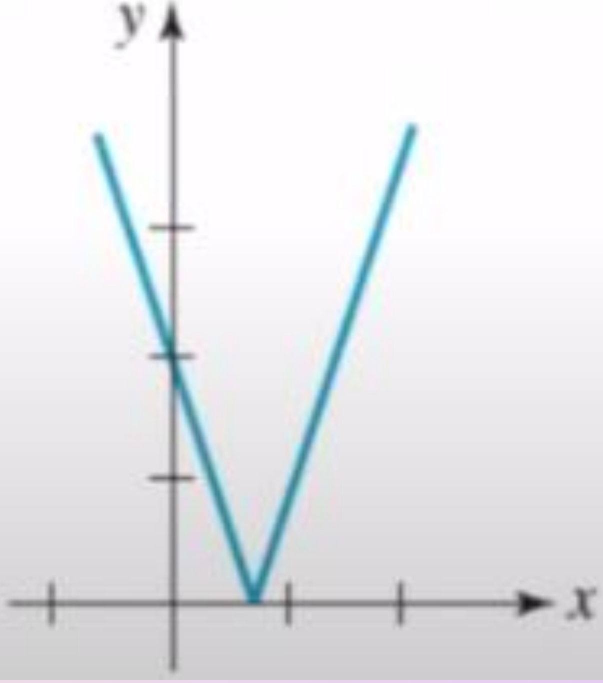
Можно рассмотреть функцию в виде f(x)=a|x+n|+c,
Но тогда по графику n= - 3 c= - 2
f(x) = a|x – 3| - 2
Определим координаты точки А: A(2;0)
0 = a|2 – 3| - 2
a = 2
f(x) = 2|x – 3| - 2
f(-15,7) = 2|-15,7 – 3| - 2 = 35,4

B10	3	5	,	4		

Модуль-1

$$y = |kx + b| + c \quad \Longrightarrow \quad y = \boldsymbol{a}|x + b| + c$$

$$(x_0; y_0): \quad y_0 = a \cdot |x_0 + b| + c$$



Модуль-2

$$y = ax + |bx + c| + d \quad \Longrightarrow$$

$$\begin{cases} ax + bx + c + d \\ ax - bx - c + d \end{cases} \qquad \begin{cases} (a + b)x + c + d \\ (a - b)x - c + d \end{cases}$$

$$\begin{cases} a + b = k_1 \\ a - b = k_2 \end{cases} \qquad a = \frac{k_1 + k_2}{2}$$

$$\begin{cases} c + d = d_1 \\ -c + d = d_2 \end{cases} \qquad d = \frac{d_1 + d_2}{2}$$

На рисунке изображён график функции вида $f(x)=ax+|bx+c|+d$, где числа a, b, c и d — целые. Найдите корень уравнения $ax+d=0$.

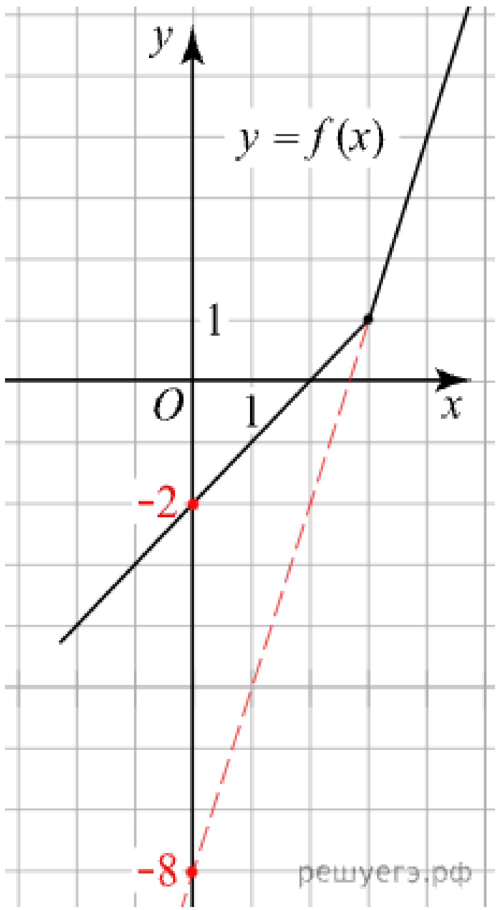
Решение.

В любом из случаев раскрытия модуля получаем линейную функцию $f(x)=kx+l$, где угловой коэффициент $k=a+|b|$ или $k=a-|b|$, а свободный член $l=d+|c|$ или $l=d-|c|$. Очевидно, что $a+|b|\geqslant a-|b|$, значит, большему значению углового коэффициента соответствует $k=a+|b|$, а меньшему — $k=a-|b|$. Аналогично большему значению свободного члена соответствует $l=d+|c|$, а меньшему — $l=d-|c|$.

По рисунку определяем, что $a+|b|=3$, $a-|b|=1$, $d+|c|=-2$, $d-|c|=-8$. Значит, $a=2$, $d=-5$.

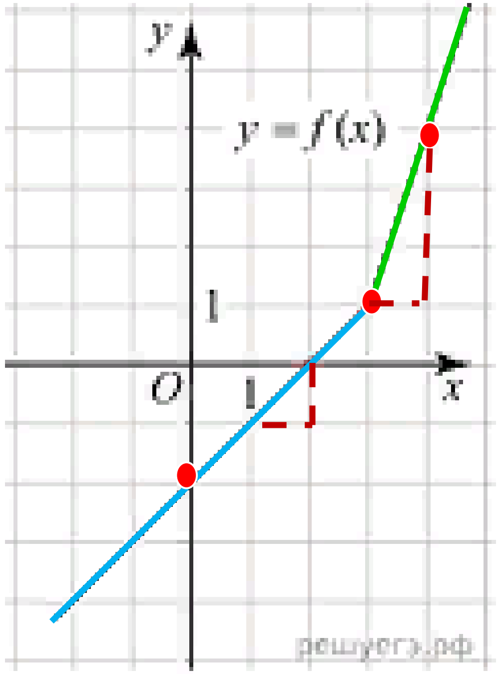
Решим уравнение $ax+d=0$:

$$2x-5=0 \Leftrightarrow x=2,5$$



B10 | 2 | , | 5

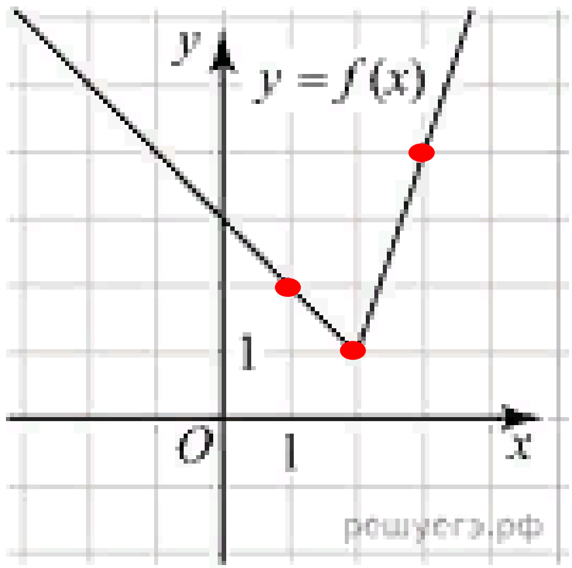
2. (564184) На рисунке изображён график функции вида $f(x) = ax + |bx + c| + d$, где числа a, b, c и d — целые. Найдите корень уравнения $ax + d = 0$.



Справа от вершины угла угловой коэффициент прямой 3, слева 1. Рассмотрим функцию $y = ax + |bx|$, график которой перенесли на 3 вправо и на 1 вверх, чтобы получить график функции $y = f(x)$. Для $x \geq 0$ эта функция задана формулой $y = (a + b)x$, $b > 0$, следовательно, $a + b = 3$. Для $x < 0$ она задана формулой $y = (a - b)x$, значит, $a - b = 1$. Откуда получаем $a = 2$, $b = 1$.

График функции $y = 2x + |x|$ перенесём на 3 вправо и на 1 вверх, получим график функции $f(x) = 2(x - 3) + |x - 3| + 1$, или $f(x) = 2x + |x - 3| - 5$. Значит, $a = 2$, $b = 1$, $c = -3$, $d = -5$. Уравнение $2x - 5 = 0$ имеет корень 2,5.

1. (564160) На рисунке изображён график функции вида $f(x) = ax + |bx + c| + d$, где числа a, b, c и d — целые. Найдите корень уравнения $bx + c = 0$.



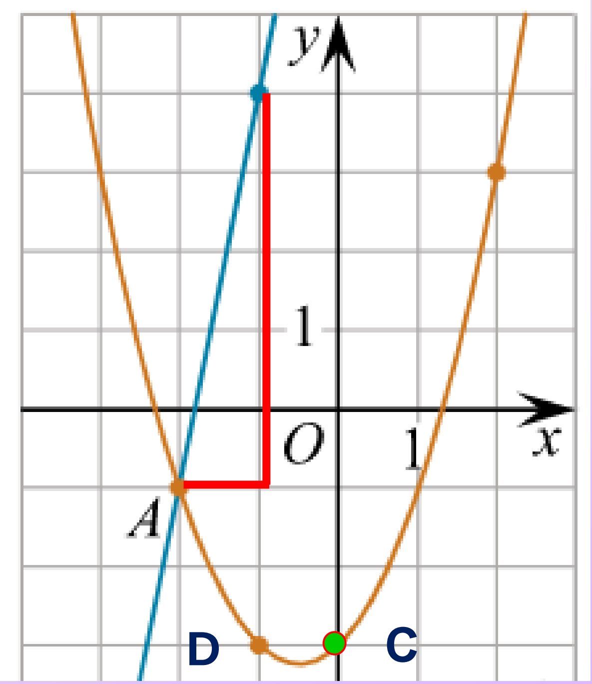
Так как $|bx + c| = |-bx - c|$, то не нарушая общности решения, считаем, что $b > 0$.

На графике выделим цветом точки с целочисленными координатами — вершина угла и две ближайшие точки. По ним определяем: справа от вершины угла угловой коэффициент прямой 3, слева –1 (с увеличением x на 1 справа ордината точки увеличивается на 3, слева — уменьшается на 1).

Рассмотрим функцию $y = ax + |bx|$, $b > 0$, график которой перенесли на 2 вправо и на 1 вверх, чтобы получить график функции $y = f(x)$. Для $x \geq 0$ эта функция задана формулой $y = (a + b)x$, следовательно, $a + b = 3$. Для $x < 0$ она задана формулой $y = (a - b)x$, значит, $a - b = -1$. Откуда получаем $a = 1$, $b = 2$. Функция задана формулой $y = x + |2x|$. Перенесём график этой на 2 вправо и на 1 вверх, получим график функции $f(x) = x - 2 + |2(x - 2)| + 1$, или $f(x) = x + |2x - 4| - 1$. Значит, $a = 1$, $b = 2$, $c = -4$, $d = -1$. Уравнение $2x - 4 = 0$ имеет корень 2.

Комбинированные задачи

На рисунке изображены графики функций $f(x) = 5x + 9$ и $g(x) = ax^2 + bx + c$, которые пересекаются в точках A и B. Найдите абсциссу точки B.



g(x): c= - 3
A(-2;-1) D(-1;-3)

$$\begin{cases} 4а – 2в – 3 = - 1 \\ а – в – 3 = - 3 \end{cases}$$

а= 1; в = 1

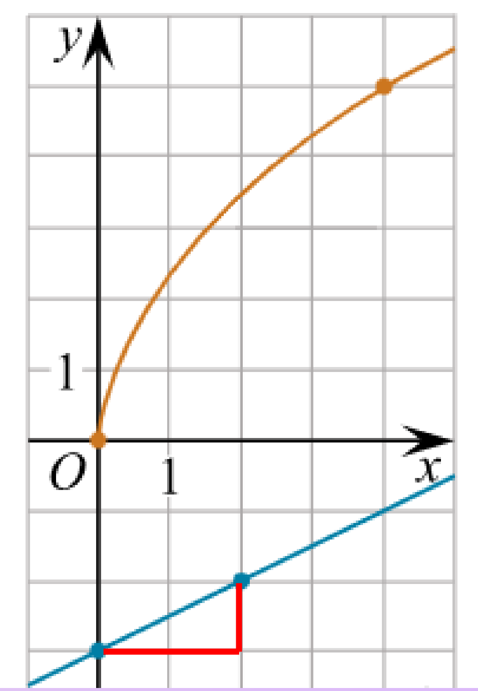
Имеем g(x) = $x^2 + x - 3$

f(x) = 5x + 9

$$5x + 9 = x^2 + x - 3 \Leftrightarrow x^2 - 4x - 12 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{aligned} x &= \frac{4 + \sqrt{16 + 48}}{2}, \\ x &= \frac{4 - \sqrt{16 + 48}}{2} \end{aligned}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{aligned} x &= 6, \\ x &= -2. \end{aligned}\right.$$

B10	6					

На рисунке изображены графики функций $f(x)=a\sqrt{x}$ и $g(x)=kx+b$, которые пересекаются в точке A. Найдите абсциссу точки A.



По графику, $f(4)=5$, тогда $a\sqrt{4}=5 \Leftrightarrow 2a=5 \Leftrightarrow a=2{,}5$. Тогда уравнение функции имеет вид $f(x)=2{,}5\sqrt{x}$.

$g(x)=0{,}5x-3.$

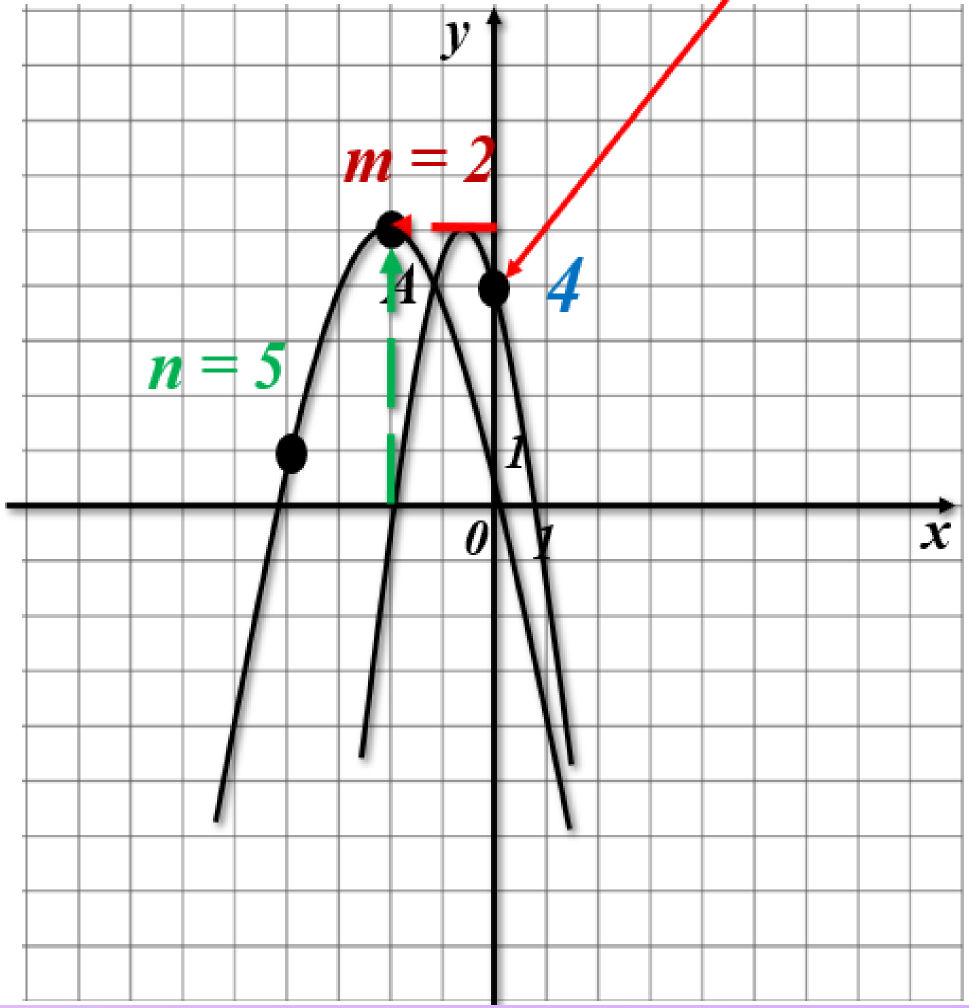
Теперь найдём абсциссу точки A:

$$\begin{cases} y=2{,}5\sqrt{x}, \\ y=0{,}5x-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2{,}5\sqrt{x}=0{,}5x-3, \\ y=0{,}5x-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-5\sqrt{x}-6=0, \\ y=0{,}5x-3 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} \sqrt{x}=6, \\ \sqrt{x}=-1 \end{array}\right., \\ y=0{,}5x-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x}=6, \\ y=0{,}5x-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=36, \\ y=15. \end{cases}$$

B10 | 3 | 6

На рисунке изображены графики функций $f(x) = -2x^2 - 2x + 4$ и $g(x) = ax^2 + bx + c$, которые пересекаются в точках $A(-1; 4)$ и $B(x_0; y_0)$. Найдите x_0.



Парабола: $g(x) = ax^2 + bx + c \rightarrow g(x) = a(x+m)^2 + n$,
где m – это смещение по оси Ox, n – смещение по оси Oy

$$\boldsymbol{a = -1, m = 2, n = 5} \Rightarrow g(x) = -(x+2)^2 + 5,$$

Приравниваем функции и ищем точки пересечения:

$$-(x+2)^2 + 5 = -2x^2 - 2x + 4 = 0$$

$x^2 - 2x + 3 = 0$, **решаем квадратное уравнение и получаем корни:** $x_1 = -1, x_2 = 3$

B10 3

На рисунке изображены графики функций $y = 2x^2 - 10$ и $y = ax^2 + bx + c$, которые пересекаются в точках A и B. Найдите абсциссу точки B.

Решение.

1) Вершина параболы $y = 2x^2 - 10$ лежит на оси Oy, следовательно, это красная парабола.
2) Уравнение второй параболы имеете вид $y = ax^2 + bx + c$. По графику видно, что $c = -2$. Абсцисса вершины $x = -1$, следовательно, $-\frac{b}{2a} = -1 \Leftrightarrow$ $b = 2a$. Значение в $x = 1$ равно 1, значит, $a + b + c = 1$. Получаем систему

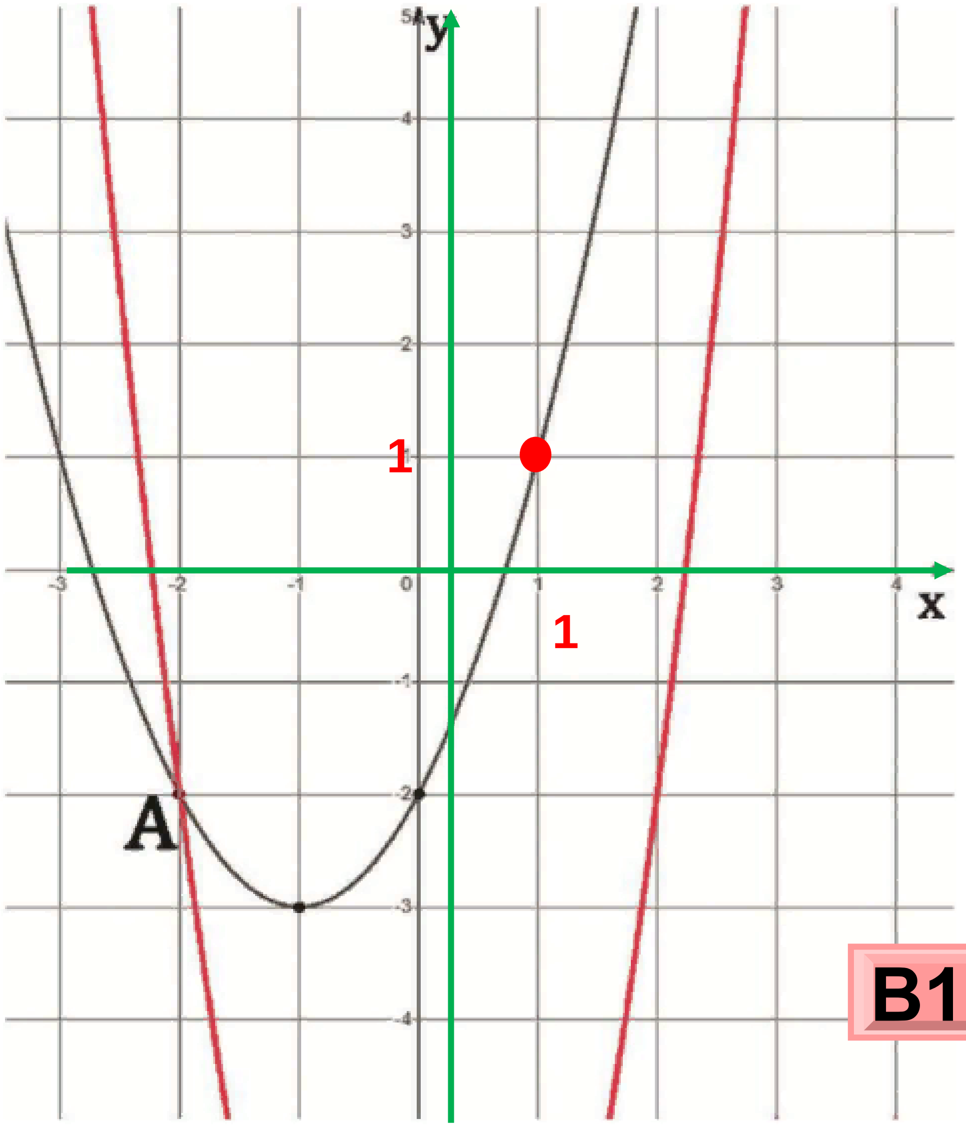
$$\begin{cases} c = -2 \\ b = 2a \\ a + b + c = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = -2 \\ b = 2 \\ a = 1 \end{cases}.$$

Получаем $y = x^2 + 2x - 2$.

3) Для поиска пересечения графиков функций приравняем их уравнения

$$2x^2 - 10 = x^2 + 2x - 2 \Leftrightarrow$$
$$x^2 - 2x - 8 = 0 \Leftrightarrow$$
$$x_1 = -2, x_2 = 4.$$

$x = -2$ это абсисса точки A, следовательно, абсцисса точки B это $x = 4$.



B10	4					

Три способа решить любую задачу №10

1 способ – находим формулу по точкам

Этот способ подходит вообще для любой десятой задачи, но занимает достаточно много времени и требует хорошего навыка решения систем уравнений.

2 способ – преобразование графиков функций

Этот способ быстрее первого, но требует больше знаний. Для использования преобразований функций нужно знать, как выглядят функции без изменения и как преобразования их меняют. Наиболее удобно использовать этот способ для иррациональной функции ($y=\sqrt{x}$) и функции обратной пропорциональности ($y=\frac{к}{x}$).

3 способ – гибридный

Идеально подходит для логарифмических и показательных функций, так как обычно у таких функций неизвестно основание и с помощью преобразований его не найти. С другой стороны, независимо от оснований любая показательная функция должна проходить через точку (0;1), а любая логарифмическая - через точку (1;0).